

COMPITO DI ISTITUZIONI DI MATEMATICHE I

C.d.L. Chimica

(04/09/2009)

Esercizio 1. Studiare la funzione

$$f(x) = \arcsen(2|x|\sqrt{1-x^2})$$

e disegnarne il grafico approssimativo.

Esercizio 2. Stabilire per quali valori dei parametri $\alpha, \beta \geq 0$ la seguente funzione è integrabile nell'intervallo $]0, 1]$

$$f(x) = \frac{\arctang(x^\alpha)}{1 - \sqrt{x^\beta + 1}}.$$

Esercizio 3. Senza utilizzare il Teorema di de l'Hopital calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\arctang(x)) + e^{\cos(x)-1} - 2}{\log(x+1)(1 - \cos(1 - \cos(x))) + 1 - \sqrt{1+x}}.$$

Esercizio 4. Utilizzando il Teorema di de l'Hopital calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctang(e^{\arcsen(\arctang(x))} - 1 - \log(\cos(e^{\sen(x)} - 1)))}{\arcsen(e^{\log(\sen(x)+1)} - 1)}.$$

Esercizio 5. Risolvere la seguente equazione in campo complesso

$$w\bar{w} - \text{Im}(|w|(2-i)) = 1.$$

Svolgimento

$$1. -1 \leq 2|x|\sqrt{1-x^2} \leq 1 \Leftrightarrow 2|x|\sqrt{1-x^2} \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x^2 \geq 0 \\ 4x^2(1-x^2) \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ 4x^4 - 4x^2 + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ (2x^2 - 1)^2 \geq 0 \quad \forall x \end{cases} \quad ID = [-1, 1]$$

$f(-x) = f(x) \Rightarrow f$ è pari e quindi il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse y

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} f(x)=0 \Rightarrow x=0 \vee x=\pm 1 \\ f(x) \geq 0 \quad \forall x \in ID \end{cases} \quad (\pm 1, 0) \quad (0, 0)$$

Intersezioni con assi

∅ asintoti di alcun tipo

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4x^2(1-x^2)}} \cdot 2 \left(\frac{x}{|x|} \sqrt{1-x^2} + |x| \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \right) = \frac{2x(1-3x^2)}{|2x^2-1||x|\sqrt{1-x^2}}$$

$$ID(f'): \begin{cases} 1-4x^2+4x^4 > 0 \\ x \neq 0 \\ 1-x^2 > 0 \end{cases} \begin{cases} x \neq \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x \neq 0 \\ -1 < x < 1 \end{cases} \Rightarrow ID(f') =]-1, 1[- \{0, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm 1} f'(x) = \mp \infty$$

Negli estremi del dominio f' ha tangente verticale

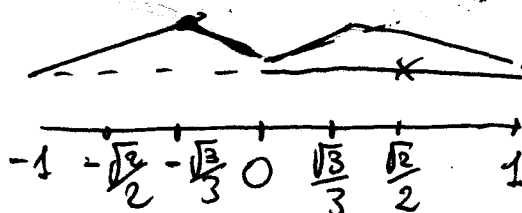
$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} f'(x) = \pm 2$$

$x=0$ pto angoloso perché

$$f'_-(0) = -2, \quad f'_+(0) = +2.$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \frac{\sqrt{2}}{2}} f'(x) = \frac{0}{0^+} \cdot (\pm 1) \frac{-1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \mp \infty \quad x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ pto a tangente verticale}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x(1-3x^2) > 0 \\ x \neq +1, \\ x \neq +\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$



$x=0$ pto di min.

rel. e assa

$x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ pto di max. rel. e assa

$$f''(x) = \begin{cases} D \frac{2(1-3x^2)}{|2x^2-1|\sqrt{1-x^2}} \\ D \frac{-2(1-3x^2)}{|2x^2-1|\sqrt{1-x^2}} \end{cases}$$

$$0 < x < 1, x \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$-1 < x < 0, x \neq -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

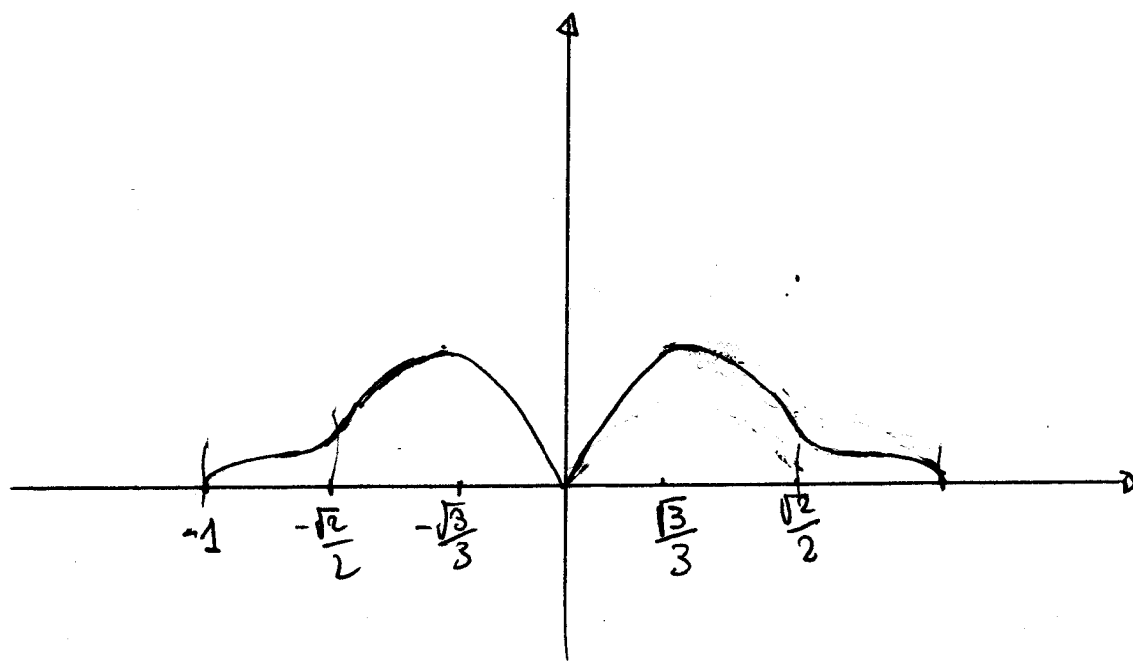
Se $0 < x < 1$, $x \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$f''(x) = 2 \frac{-6x(2x^2-1)\sqrt{1-x^2} + (1-3x^2) \left(\frac{(2x^2-1)4x\sqrt{1-x^2}}{2x^2-1} + (2x^2-1) \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \right)}{(2x^2-1)^2(1-x^2)} \quad (2)$$

$$= 2 \frac{-6x(2x^2-1)\sqrt{1-x^2} + (1-3x^2) \frac{4x(2x^2-1)(1-x^2) + (2x^2-1)(-2x)}{(2x^2-1)\sqrt{1-x^2}}}{(2x^2-1)^2(1-x^2)}$$

$$= 2x \frac{-6x(2x^2-1)(1-x^2) + (1-3x^2)(2x^2-1)[(1-x^2)4x - x]}{(2x^2-1)^3(1-x^2)^{3/2}}$$

Non concludo i calcoli perché lunghi, comunque dallo studio dei pt angolari e cuspidali si può dedurre il seguente grafico



2. Se $\alpha, \beta > 0$ si ha che per $x \rightarrow 0^+$:

$$\operatorname{arctg} x^\alpha \simeq x^\alpha, \quad 1 - \sqrt{x^\beta + 1} \simeq -\frac{1}{2}x^\beta \quad (\text{perché } \frac{(1+x)^p - 1}{x} = p)$$

quindi il limite diventa

(3)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^\alpha}{-\frac{1}{2}x^\beta} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > \beta \\ -2 & \text{se } \alpha = \beta \\ -\infty & \alpha < \beta \end{cases}$$

con ord. $\beta - \alpha$

Insomma se $\alpha = 0, \beta \neq 0$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\arctan x} - 1}{1 - \sqrt{x^\beta + 1}} = -\infty$ con ord β

$\alpha > 0, \beta = 0$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^\alpha}{1 - \sqrt{2}} = 0$

$\alpha = \beta = 0$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{1 - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}}$

Però f è continua in $]0, 1[$ segue che è integrabile se

$\alpha \geq \beta \geq 0$ (perché convergente per $x \rightarrow 0^+$) oppure se

$0 \leq \alpha < \beta$ e $\beta - \alpha < 1$ (perché divergente di ordine $\beta - \alpha < 1$)

Insomma f non è integrabile se $\beta - \alpha \geq 1$ (perché divergente di ordine $\beta - \alpha \geq 1$).

3. Però per $x \rightarrow 0$

$$\cos(\arctan x) - 1 \simeq -\frac{1}{2}(\arctan x)^2 \simeq -\frac{1}{2}x^2$$

$$e^{\cos x - 1} - 1 \simeq \cos x - 1 \simeq -\frac{1}{2}x^2$$

$$\lg(x+1) \simeq x$$

$$1 - \cos(1 - \cos x) \simeq \frac{1}{2}(1 - \cos x)^2 \simeq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^2\right)^2 = \frac{1}{8}x^4$$

$$1 - \sqrt{1+x} \simeq -\frac{1}{2}x$$

il limite diventa

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^2}{x \cdot \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{2}x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{-\frac{1}{2}x} = 0.$$

4. Poiché il limite si presenta nella forma $\frac{0}{0}$, applicando (4) e l'Hopital si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^{\arcsin(\arcsin x)} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\arcsin^2 x}} \cdot \frac{1}{1+x^2} - \frac{-\sin(e^{\arcsin x}-1) \cdot e^{\arcsin x} \cdot \cos x}{\cos(e^{\arcsin x}-1)}}{1 + \left(e^{\arcsin(\arcsin x)} - 1 - \lg(\cos(e^{\arcsin x}-1)) \right)^2}}{\frac{1}{\sqrt{1 - \left(e^{\lg(\sin x+1)} - 1 \right)^2}} \cdot e^{\lg(\sin x+1)} \cdot \frac{1}{\sin x+1} \cdot \cos x}} = 1$$

N.B. Il denominatore della funzione di partenza si può in realtà semplificare essendo

$$\arcsin(e^{\lg(\sin x+1)} - 1) = \arcsin(\sin x + 1 - 1) = x.$$

5. Poiché

$$w \bar{w} = |w|^2 \quad \text{e} \quad \operatorname{Im}(|w|(2-i)) = -|w|$$

l'equazione diventa

$$|w|^2 + |w| - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad |w|_{\frac{1}{2}} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Poiché $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0$ non è accettabile, le soluzioni

sono date dai numeri complessi w e

$|w| = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, cioè dai numeri complessi che si

trovano sulla circonferenza di centro l'origine e

raggio $r = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

