

COMPITO DI ISTITUZIONI DI MATEMATICHE I

C.d.L. Chimica

(17/07/2009)

Esercizio 1. Studiare la funzione

$$f(x) = \arcsen \left(\left| \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right| \right)$$

e disegnarne il grafico approssimativo.

Esercizio 2. Stabilire per quali valori dei parametri $\alpha, \beta \geq 0$ la seguente funzione è integrabile nell'intervallo $]0, 1]$

$$f(x) = \frac{\log(1 + x^\alpha)}{e^{x^\beta} - 1}.$$

Esercizio 3. Senza utilizzare il Teorema di de l'Hopital calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(x \arctang(x) + 1) + \sen((e^x - 1) \log(x + 1))}{(\cos(\arctang(x)) - 1)(e^x - 1) + \arctang(x)}.$$

Esercizio 4. Utilizzando il Teorema di de l'Hopital calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sen(x) + e^{\cos(x)} - e)^{\frac{1}{\arctang^2(\arctang(x))}}.$$

Esercizio 5. Risolvere la seguente equazione in campo complesso

$$w\bar{w} - \text{Im}(|w|(2 - i)) = -1.$$

Svolgimento

$$1. \text{ ID: } -1 \leq \left| \frac{x^2-1}{x^2+1} \right| \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2-1}{x^2+1} \leq 1 \\ \frac{x^2-1}{x^2+1} \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-1 \leq x^2+1 \\ x^2-1 \geq -x^2-1 \end{cases} \quad \forall x$$

$\text{ID} = \mathbb{R}$ Poiché $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ f è pari $\Rightarrow$
il grafico di f è simmetrico rispetto all'asse y

$\nexists$ asintoti verticali poiché f è continua in tutto $\mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \arcsen \left| \frac{x^2(1 - \frac{1}{x^2})}{x^2(1 + \frac{1}{x^2})} \right| = \arcsen 1 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$y = \frac{\pi}{2} \text{ as. orizz. a } \pm \infty. \quad f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

$$x = 0 \Rightarrow y = \frac{\pi}{2}$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2}} \cdot \frac{\frac{x^2-1}{x^2+1}}{\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right|} \cdot \frac{2x(x^2+1) - 2x(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1}{\sqrt{4x^2}} \cdot \frac{\frac{x^2-1}{x^2+1}}{\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right|} \cdot \frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

$$\text{ID}(y') = \mathbb{R} - \{0, \pm 1\}$$

$$y' = \begin{cases} \frac{2x}{|x|} \cdot \frac{1}{x^2+1} \\ -\frac{2x}{|x|} \cdot \frac{1}{x^2+1} \end{cases}$$

$$\text{se } \frac{x^2-1}{x^2+1} > 0 \Leftrightarrow x < -1 \vee x > 1$$

$$\text{se } \frac{x^2-1}{x^2+1} < 0 \wedge \neq 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1, x \neq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y' = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{2}{x^2+1} = -2, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} y' = \lim_{x \rightarrow 0^-} +\frac{2}{x^2+1} = +2 \Rightarrow \begin{matrix} x=0 \text{ pto} \\ \text{angolo} \end{matrix}$$

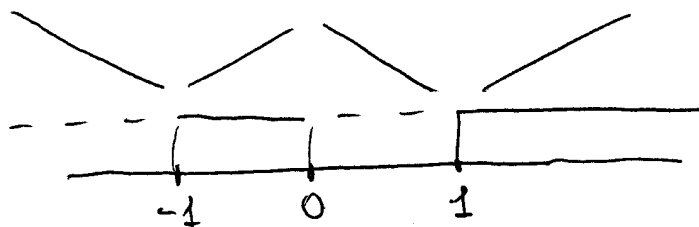
$$f'_{\pm}(0) = \mp 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} y' = \lim_{x \rightarrow 1^+} -\frac{2}{x^2+1} = -1 \Rightarrow x=1 \text{ pto angolo}, \quad f'_{+}(1) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} y' = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{+2}{x^2+1} = +1 \Rightarrow x=-1 \text{ pto angolo}$$

$$y' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x}{|x|} \frac{1}{x^2+1} > 0 \\ x < -1 \vee x > 1 \end{cases} \vee \begin{cases} -\frac{2x}{|x|} \frac{1}{x^2+1} > 0 \\ -1 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < -1 \vee x > 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 0 \\ -1 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1 \vee -1 < x < 0$$



f st. cres. in $[-1, 0]$, $[1, +\infty)$

f st. decr. in $(-\infty, -1]$, $[0, 1]$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=\frac{1}{2} \end{cases} \text{ massimo}$$

$$\begin{cases} x=\pm 1 \\ y=0 \end{cases}$$

minimi rel. e ass.

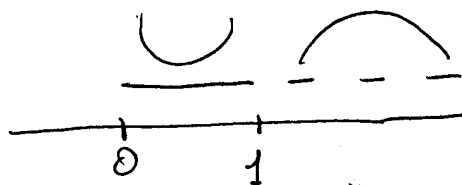
Studio y'' solo per $x > 0$

$$y'' = \begin{cases} D \frac{2}{x^2+1} = -\frac{4x}{(x^2+1)^2} \\ D \left(-\frac{2}{x^2+1} \right) = \frac{4x}{(x^2+1)^2} \end{cases}$$

se $x > 1$

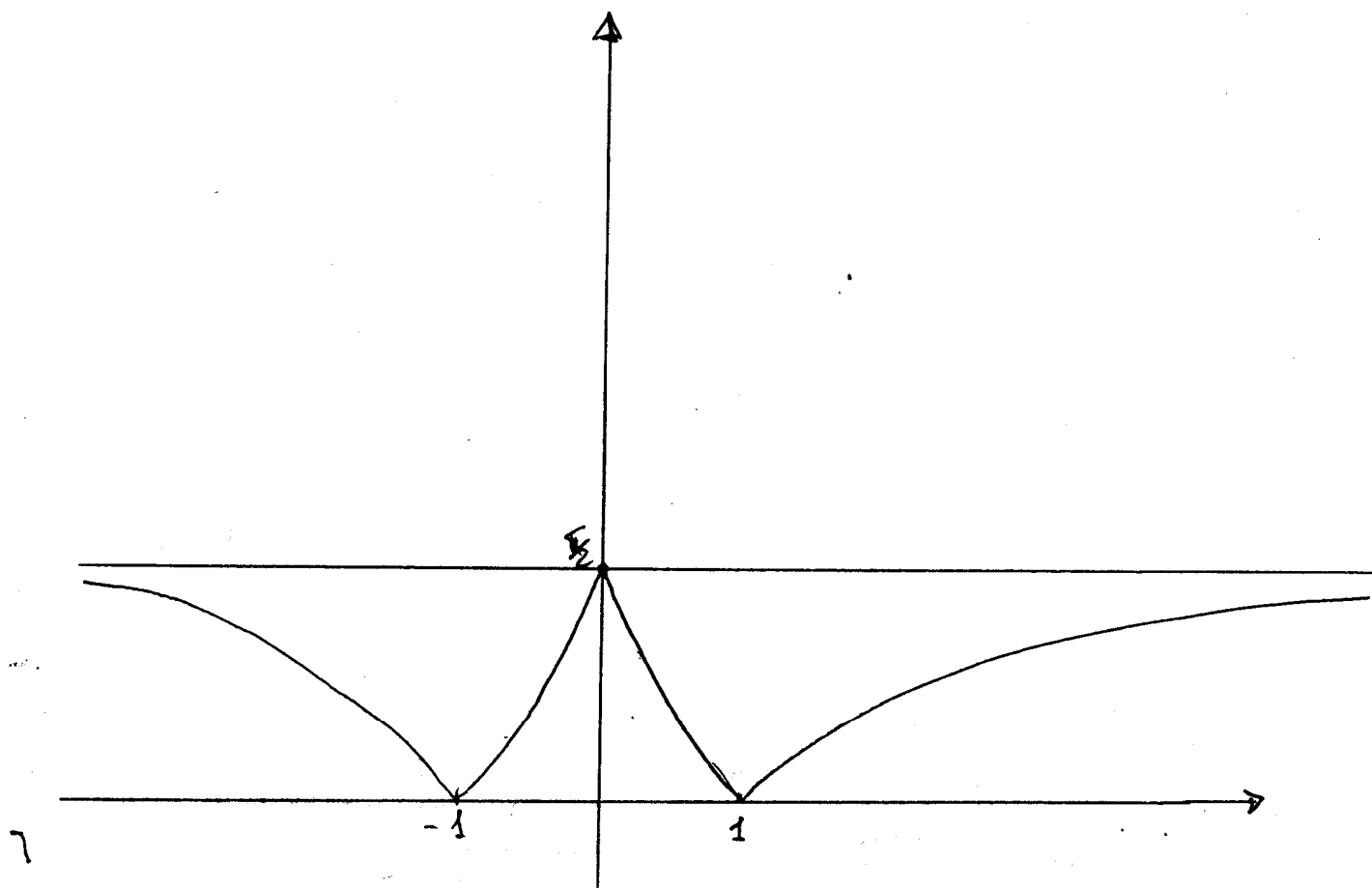
se $0 < x < 1$

$$y'' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -x > 0 \\ x > 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x > 0 \\ 0 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 1$$



f concave in $]0, 1[$ (e per simmetria in $]-1, 0[$)

convessa in $]1, +\infty)$ (e per simmetria in $(-\infty, -1[$)



2. Sia $\alpha > 0, \beta > 0$.
 2. Sostieni che, poiché per $x \rightarrow 0^+$ $\lg(1+x^\alpha) \simeq x^\alpha$ e $e^{x^\beta} - 1 \simeq x^\beta$, si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^\alpha}{x^\beta} = \begin{cases} 0 & \alpha > \beta > 0 \\ 1 & \alpha = \beta \\ +\infty & 0 < \alpha < \beta \end{cases}$$

con ordine $\beta - \alpha$

Se $\alpha = 0$
 $\beta > 0$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\lg 2}{e^{x^\beta} - 1} = +\infty$ con ordine β

Se $\alpha \neq 0$
 $\beta = 0$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\lg(1+x^\alpha)}{e-1} = 0$

Se $\alpha = \beta = 0$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{\lg 2}{e-1}$

• Poiché f è continua in $]0,1]$, segue che è integrabile se
 $\alpha \geq \beta \geq 0$ (perché convergente per $x \rightarrow 0^+$) oppure se
 $0 \leq \alpha < \beta$ e $\beta - \alpha < 1$ (perché divergente di ordine $\beta - \alpha < 1$).

3. Poiché se $x \rightarrow 0$ si ha

$$\lg(x \operatorname{arctg} x + 1) \simeq x \operatorname{arctg} x \simeq x^2$$

$$\operatorname{sen}((e^x - 1) \lg(x+1)) \simeq (e^x - 1) \lg(x+1) \simeq x^2$$

$$(\cos(\operatorname{arctg} x) - 1)(e^x - 1) + \operatorname{arctg} x \simeq (\cos x - 1)x + x \simeq x$$

il limite diventa $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x^2}{x} = 0$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{sen} x + e^{\cos x} - e)^{\frac{1}{\operatorname{arctg}^2(\operatorname{arctg} x)}} = 0^{+\infty}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{\operatorname{arctg}^2(\operatorname{arctg} x)} \lg(\operatorname{sen} x + e^{\cos x} - e)} = e^{+\infty} = +\infty$$

In fatti $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg(\operatorname{sen} x + e^{\cos x} - e)}{\operatorname{arctg}^2(\operatorname{arctg} x)} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\cos x - e^{\cos x} \cdot \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x + e^{\cos x} - e}}{2 \operatorname{arctg}(\operatorname{arctg} x) \cdot \frac{1}{1 + \operatorname{arctg}^2 x} \cdot \frac{1}{1 + x^2}}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ix} - e^{-ix} \cdot \sin x}{\sin x + e^{ix} - e^{-ix}} \cdot \frac{(1 + \operatorname{arctg}^2 x)(1 + x^2)}{2 \operatorname{arctg}(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

N.B. Il limite dell'esponente vale $+\infty$ perché la funzione

è definita quando $\sin x + e^{ix} - e^{-ix} > 0$

Poiché tale disuguaglianza vale solo a destra di 0
(per $x < 0$ vicino a 0: $\sin x < 0$ e quindi $\sin x + e^{ix} - e^{-ix} < 0$)

il limite da risolvere è un limite da destra e quindi si ha anche l'altro denominatore $\operatorname{arctg}(\operatorname{arctg} x) > 0$.

5. Poiché $w \bar{w} = |w|^2$ e $\operatorname{Im}(|w|(2-i)) = -|w|$

l'equazione diventa

$$|w|^2 + |w| + 1 = 0 \quad \text{che non ha radici reali} \\ (|w| \in \mathbb{R} \text{ per definizione})$$

Si conclude che l'equazione di partenza non ha soluzioni.