

COMPITO DI ISTITUZIONI DI MATEMATICHE I
C.d.L. Chimica
(03/07/2009)

Esercizio 1. Studiare la funzione

$$f(x) = e^{-|x|} \sqrt{x^2 - 3x + 2}$$

e disegnarne il grafico approssimativo.

Esercizio 2. Stabilire per quali valori dei parametri $\alpha, \beta \geq 0$ la seguente funzione è integrabile nell'intervallo $]0, 1]$

$$f(x) = \frac{\arctang(x^\alpha)}{\operatorname{sen}^\beta(x)}.$$

Esercizio 3. Senza utilizzare il Teorema di de l'Hopital calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctang(x(e^x - 1)) + \operatorname{sen}(\cos(x) - e^x)}{\arctang(x)(\operatorname{sen}(x) \log(x + 1)(e^x - 1)) + x}.$$

Esercizio 4. Utilizzando il Teorema di de l'Hopital calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - \operatorname{sen}(e^x - 1))^{\frac{1}{\operatorname{sen}^2(\arctang(x))}}.$$

Esercizio 5. Risolvere la seguente equazione in campo complesso

$$w\overline{w} - \operatorname{Re}(|w|(2 - i)) = -1.$$

$$1. \text{ ID: } x^2 - 3x + 2 \geq 0 \quad x_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \quad \text{ID} = (-\infty, +1] \cup [2, +\infty)$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=\sqrt{2} \end{cases} \quad \begin{cases} y=0 \\ e^{-|x|} \sqrt{x^2 - 3x + 2} = 0 \Rightarrow x=1, 2 \end{cases} \quad (0, \sqrt{2}) \quad (1, 0) \quad (2, 0)$$

$$f(x) > 0 \quad \forall x \in \text{ID} \quad x \neq 1, 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = 0 \cdot \infty = 0 \quad \text{per gli ordini } (e^x \rightarrow 0 \text{ molto velocemente se } x \rightarrow +\infty)$$

$$y=0 \text{ As. o.c. As. verticali per } x=1, 2 \in \text{ID}(f).$$

$$y' = e^{-|x|} \left(-\frac{x}{|x|} \right) \sqrt{x^2 - 3x + 2} + e^{-|x|} \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2 - 3x + 2}} \quad \forall x \in \text{ID} \quad x \neq 0, 1, 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} f'(x) = \mp \sqrt{2} - \frac{3}{2\sqrt{2}} \quad x=0 \text{ pto angoloso}$$

$$f'_-(0) = \sqrt{2} - \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{+1}{2\sqrt{2}}, \quad f'_+(0) = -\sqrt{2} - \frac{3}{2\sqrt{2}} = -\frac{5}{2\sqrt{2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty \quad x=1 \quad x=2$$

pti di semicuspide

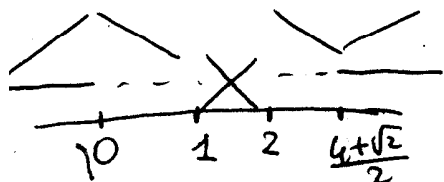
$$y' > 0 \Leftrightarrow e^{-|x|} \left[\sqrt{x^2 - 3x + 2} \left(-\frac{x}{|x|} \right) + \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2 - 3x + 2}} \right] > 0$$

$$\Leftrightarrow -2 \frac{x}{|x|} (x^2 - 3x + 2) + 2x - 3 > 0$$

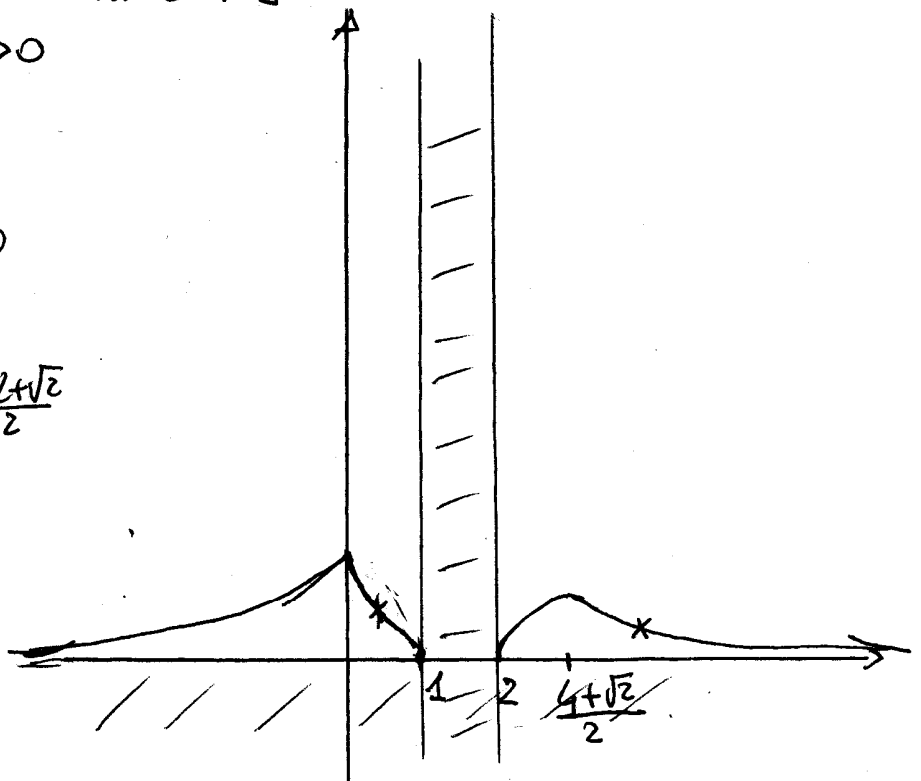
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ -2x^2 + 8x - 3 > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ 2x^2 - 4x + 1 > 0 \end{cases}$$

$$x > 0 \quad \vee \quad \begin{cases} x < 0 \\ x < \frac{2-\sqrt{2}}{2} \vee x > \frac{2+\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$2 < x < \frac{4+\sqrt{2}}{2} \quad \vee \quad x < 0$$



$$\text{Max} \begin{cases} x=0 \\ y=\sqrt{2} \end{cases} \quad \text{min} \begin{cases} x=\frac{4+\sqrt{2}}{2} \\ y=0 \end{cases}$$



Per brevit  ometto i conti sulla y'' . Anche se la disegrazione $y'' > 0$ non riesce a mostrare perch  di 4° grado, si pu  vedere che vicino l'origine si ha $y'' > 0$ quindi f concasse e quindi f deve avere un flesso tra 0 e 1 e un altro flesso dopo 2.

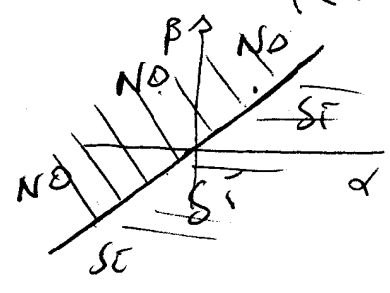
2. Poi ch 

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctg x^\alpha}{\sin^\beta x} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^\alpha}{x^\beta} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > \beta > 0 \\ 1 & \text{se } \alpha = \beta > 0 \\ +\infty \text{ (con ord. } \beta - \alpha) & \text{se } 0 < \alpha < \beta \end{cases} \\ \frac{1}{0^+} = +\infty \text{ (con ord } \beta) & \text{se } \alpha = 0 \wedge \beta > 0 \\ 0 & \text{se } \alpha > 0 \wedge \beta = 0 \\ \frac{\pi}{4} & \text{se } \alpha = \beta = 0 \end{cases}$$

segue da

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \begin{cases} l \in \mathbb{R} & \text{se } \alpha \geq \beta \geq 0 \\ +\infty \text{ con ord. } \beta - \alpha & \text{se } \beta > \alpha \geq 0 \end{cases}$$

Essendo f continua in $]0,1]$ si conclude che $f \in \text{integrab.}$ in senso improprio in $]0,1]$ se $\alpha \geq \beta \geq 0 \vee 0 < \beta - \alpha < 1$ ($\Leftrightarrow \beta - \alpha < 1$) non lo   se $\beta - \alpha \geq 1$.



3. Poi ch  per $x \rightarrow 0$ si ha:

$$\arctg(x(e^x - 1)) \simeq x(e^x - 1) \simeq x^2$$

$$\sin(\cos x - e^x) \simeq \cos x - e^x \simeq \cos x - 1 + 1 - e^x \simeq -\frac{x^2}{2} + x \simeq -x$$

$$\arctg x \cdot \sin x \cdot \lg(x+1)(e^x - 1) \simeq x(x \cdot x \cdot x) = x^4$$

segue da

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{x^4 + x} = -1$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} (e^x - \operatorname{sen}(e^x - 1))^{\frac{1}{\operatorname{sen}^2(\operatorname{arctg} x)}} = 1^{+\infty}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\operatorname{tg}(e^x - \operatorname{sen}(e^x - 1))}{\operatorname{sen}^2(\operatorname{arctg} x)}} = e^0 = 1$$

per di

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(e^x - \operatorname{sen}(e^x - 1))}{\operatorname{sen}^2(\operatorname{arctg} x)} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x - \cos(e^x - 1) \cdot e^x}{e^x - \operatorname{sen}(e^x - 1)}}{\frac{2 \operatorname{sen}(\operatorname{arctg} x) \cdot \cos(\operatorname{arctg} x)}{1 + x^2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x (1 - \cos(e^x - 1))}{e^x - \operatorname{sen}(e^x - 1)} \cdot \frac{1 + x^2}{2 \operatorname{sen}(\operatorname{arctg} x) \cdot \cos(\operatorname{arctg} x)} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x (1 + x^2)}{e^x - \operatorname{sen}(e^x - 1)} \cdot \frac{1}{2 \cos(\operatorname{arctg} x)} \cdot \frac{1 - \cos(e^x - 1)}{\operatorname{sen}(\operatorname{arctg} x)} = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$$

$$\text{essendo } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(e^x - 1)}{\operatorname{sen}(\operatorname{arctg} x)} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(e^x - 1) \cdot e^x}{\cos(\operatorname{arctg} x) \cdot \frac{1}{1 + x^2}} = 0$$

5. Posto $w = x + iy$ si ha $w\bar{w} = x^2 + y^2$ e

$$\operatorname{Re}(|w|(2 - i)) = |w|2 = 2\sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{e quindi}$$

$$x^2 + y^2 - 2\sqrt{x^2 + y^2} = -1 \quad \text{Se } t = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ si ha}$$

$$t^2 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 1$$

Le soluzioni dell'equazione sono tutti i punti della

circonferenza $x^2 + y^2 = 1$, o meglio Tutti i numeri complessi

$w = x + iy$ per cui $|w| = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$.

