

COMPITO DI ISTITUZIONI DI MATEMATICHE I

C.d.L. Chimica

(22/06/2009)

Esercizio 1. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + \log(|x + 1|)$$

e disegnarne il grafico approssimativo.

Esercizio 2. Stabilire per quali valori dei parametri $\alpha, \beta \geq 0$ la seguente funzione è integrabile nell'intervallo $]0, 1]$

$$f(x) = \frac{e^{x^\alpha} - 1}{(1 - \cos(x))^\beta}.$$

Esercizio 3. Senza utilizzare il Teorema di de l'Hopital calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \sin(x)} + 2 \cos(\sin(x)) - 3}{\sin(x) \arctang(\arctang(x)(\cos(x) - 1)) + \arcsen(x)}.$$

Esercizio 4. Utilizzando il Teorema di de l'Hopital calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos(\sin(x) + \sin(\sin(x)))^{\frac{1}{\arctang^2(\sin(x))}}).$$

Esercizio 5. Risolvere la seguente equazione in campo complesso

$$w\overline{w} - \operatorname{Re}(|w|(2 - i)) = 1.$$

1. ID: $|x+1| > 0$ $x+1 \neq 0$ $x \neq -1$ f non è pari né dispari

Non studio $f(x) > 0$ e $f(x) = 0$ (dovrei usare il metodo grafico!)

Asintoti $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x^2}{2} + \lg|x+1| \right) = \frac{1}{2} + \lg 0 = -\infty$ $x = -1$ As. Vert.

$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x}{2} + \underbrace{\frac{\lg|x+1|}{x}}_{\rightarrow 0 \text{ per gli ordini}} = \pm \infty$

3 as. obliq. in origine

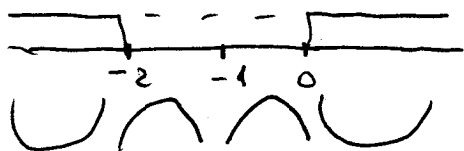
$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

$f'(x) = x + \frac{1}{x+1} = \frac{x^2+x+1}{x+1} \quad \forall x \neq -1$

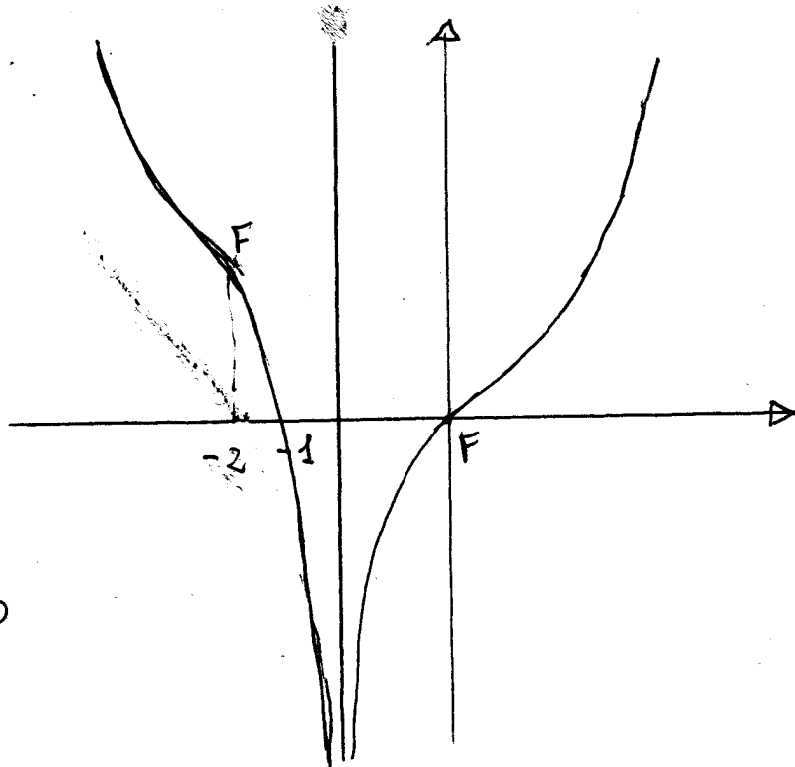
$f'(x) > 0 \quad x > -1$

$f''(x) = \frac{(2x+1)(x+1) - (x^2+x+1)}{(x+1)^2}$

$f''(x) > 0 \quad x^2+2x > 0 \quad x < -2 \vee x > 0$



$F \begin{cases} x=-2 \\ y=2 \end{cases} \quad F \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$



2. Si assume che

$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x^\alpha} - 1 = \begin{cases} 0 & \alpha > 0 \\ e-1 & \alpha = 0 \\ +\infty & \alpha < 0 \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - \cos x)^\beta = \begin{cases} 0^+ & \beta > 0 \\ 1 & \beta = 0 \\ +\infty & \beta < 0 \end{cases}$

e quindi puoi essere interessato solo al caso $\alpha, \beta \geq 0$ e ha:

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x^\alpha} - 1}{(1 - \cos x)^\beta} = \begin{cases} \frac{0}{0} = ? & \alpha > 0 \wedge \beta > 0 \\ e-1 & \alpha = 0 \wedge \beta = 0 \\ \frac{e-1}{0^+} = +\infty & \alpha = 0 \wedge \beta > 0 \\ \frac{0}{0} = 0 & \alpha > 0 \wedge \beta = 0 \end{cases}$

Studiamo il caso $\alpha > 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x^\alpha} - 1}{(1 - \cos x)^\beta} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^\alpha}{\left(\frac{1}{2}x^2\right)^\beta} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2^\beta x^{\alpha - 2\beta} = \begin{cases} 0 & \alpha > 2\beta > 0 \\ 2^\beta & \alpha = 2\beta > 0 \\ +\infty & 0 < \alpha < 2\beta \end{cases}$$

con ord. $2\beta - \alpha$

Nel caso $\alpha = 0 \wedge \beta \geq 0$ invece f è infinito di ordine 2β .

Dunque

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \begin{cases} \ell \in \mathbb{R} & \text{se } \alpha \geq 2\beta > 0 \\ +\infty & \text{di ordine } 2\beta - \alpha \text{ se } 0 \leq \alpha < 2\beta \end{cases}$$

Perché f è continua in $]0,1]$ segue che è integrabile in senso improprio in $]0,1]$ se $\alpha \geq 2\beta \geq 0$ (in tal caso è prolungabile per continuità in $x=0$) oppure se $\begin{cases} 0 \leq \alpha < 2\beta \\ 2\beta - \alpha < 1 \end{cases}$ mentre non è integrabile se $2\beta - \alpha \geq 1$.

Conclusione: $f \in L^1_{\text{reg}}$ in s.i. in $]0,1]$ se $0 \leq 2\beta - \alpha < 1$ non lo è se $2\beta - \alpha \geq 1$.

$$3. e^{x \sin x} + 2 \cos(\sin x) - 3 = e^{x \sin x} - 1 + 2 \cos(\sin x) - 2 \simeq x^2 - x^2$$

perché $e^{x \sin x} - 1 \simeq x \sin x \simeq x^2$ cioè ha ordine > 2

$$2 \cos(\sin x) - 2 \simeq 2 \left(-\frac{1}{2} \sin^2 x \right) \simeq -x^2$$

$$\sin x \arctg(\arctg x (\cos x - 1)) + \arcsin x \simeq -\frac{1}{2} x^4 + x \simeq x$$

$$\sin x \arctg(\arctg x (\cos x - 1)) \simeq x \cdot \arctg x \left(-\frac{x^2}{2} \right) \simeq -\frac{1}{2} x^4$$

$$\arcsin x \simeq x$$

Perché il numeratore ha ordine > 2 mentre il denominatore ha ordine 1, il limite vale 0.

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos(\sin x) + \sin(\sin x))^{\frac{1}{\arctan^2(\sin x)}} = 1^{+\infty}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{\arctan^2(\sin x)} \ln(\cos(\sin x) + \sin(\sin x))} = \cancel{\text{L'H}} = \cancel{\text{L'H}}$$

perché $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = e^{+\infty} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = e^{-\infty} = 0$ essendo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(\sin x) + \sin(\sin x))}{\arctan^2(\sin x)} = \frac{0}{0} =$$

$$\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(\sin x) \cos x + \cos(\sin x) \cdot \cos x}{\cos(\sin x) + \sin(\sin x)} \cdot \frac{1}{2 \arctan(\sin x) \cdot \frac{1}{1+\sin^2 x} \cdot \cos x}$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 1 1

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 \arctan(\sin x)} \cancel{\text{L'H}} \quad \text{perché} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\arctan(\sin x)} = \frac{1}{0} = \pm \infty.$$

5. Posto $w = x + iy$ si ha $w\bar{w} = x^2 + y^2$,

$$\operatorname{Re}(|w|(2-i)) = \operatorname{Re}(\sqrt{x^2+y^2}(2-i)) = 2\sqrt{x^2+y^2} \quad \text{e quindi}$$

$$x^2 + y^2 + 2\sqrt{x^2+y^2} = 1 \quad \text{e chiamando } \sqrt{x^2+y^2} = t \quad \text{si ha}$$

$$t^2 - 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow t_{\pm} = 1 \pm \sqrt{2} = \begin{cases} 1 - \sqrt{2} < 0 \text{ non accet.} \\ 1 + \sqrt{2} > 0 \text{ accet.} \end{cases}$$

Le soluzioni dell'eq. sono dunque tutti i numeri complessi per cui $|w| = \sqrt{x^2+y^2} = 1 + \sqrt{2}$, cioè nel piano complesso tutti i punti della circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio $r = 1 + \sqrt{2}$.

