

COMPITO DI ISTITUZIONI DI MATEMATICHE I

C.d.L. Chimica

(23/02/2009)

Esercizio 1. Studiare la funzione

$$f(x) = \log(x + \sqrt{|x^2 - 1|})$$

e disegnarne il grafico approssimativo.

Esercizio 2. Stabilire per quali valori dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ la seguente funzione è integrabile nell'intervallo $]0, 1]$

$$f(x) = \frac{e^{x^\alpha} - 1}{\operatorname{sen}^\beta(x)}.$$

Esercizio 3. Senza utilizzare il Teorema di de l'Hopital calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctang(x(e^x - 1)) + \operatorname{sen}(\cos(x) - e^x)}{\operatorname{sen}(x) \arctang(\arctang(x)(\cos(x) - 1)) + \arcsen(x)}.$$

Esercizio 4. Utilizzando il Teorema di de l'Hopital calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \operatorname{sen}(x)} + 2 \cos(\operatorname{sen}(x)) - 3}{\arctang(x) \operatorname{sen}(x \log(x+1)(e^x - 1)) + x}.$$

Esercizio 5. Assegnata la funzione

$$f(x) = \log \left(\sqrt{\frac{x+3}{x^2}} \right)$$

si calcoli $\operatorname{Dom}(f)$, $\operatorname{Codom}(f)$ e $\operatorname{Codom}(f|_{]0, \infty[})$.

Esercizio 6. Risolvere la seguente equazione in campo complesso

$$w\overline{w} - \operatorname{Im}(w(2 - i)) = \frac{1}{4i}.$$

NOTA BENE: coloro che fanno il secondo esonero devono risolvere gli esercizi 1, 2, 3.

Svolgimento

$$1. ID: x + \sqrt{|x^2-1|} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{|x^2-1|} > -x \Leftrightarrow \begin{cases} -x < 0 \\ |x^2-1| \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} -x \geq 0 \\ |x^2-1| > x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x > 0 \vee \begin{cases} x \leq 0 \\ x^2-1 < -x^2 \vee x^2-1 > x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0 \vee \begin{cases} x < 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$ID =]-\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty) \quad \text{f non \u00e8 ne-pari ne-dispari}$$

$$\text{Intersezioni con assi} \quad \begin{cases} x=0 \\ y=\lg 1=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=0 \\ x+\sqrt{|x^2-1|}=0 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{|1-x^2|}=1-x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1-x \geq 0 \\ |1-x|=(1-x)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x^2-2x+1=1-x \vee x^2-2x+1=-1+x \end{cases} \Rightarrow x=0,1$$

$(0,0)$ $(1,0)$ intersezioni

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x + \sqrt{|x^2-1|} > 1 \Leftrightarrow \sqrt{|1-x^2|} > 1-x \Leftrightarrow$$

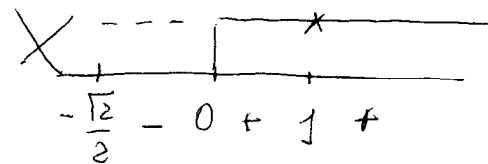
$$1-x < 0 \vee \begin{cases} 1-x \geq 0 \\ |x^2-1| > (1-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1 \vee \begin{cases} x \leq 1 \\ x^2-1 < -(1-x)^2 \vee x^2-1 > (1-x)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x > 1 \vee \begin{cases} x \leq 1 \\ x^2-1 < -1+x^2+2x \vee x^2-1 > 1+x^2-2x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$x > 1 \vee \begin{cases} x \leq 1 \\ 0 < x < 1 \vee x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1 \vee 0 < x < 1$$

$$f(x) > 0 \quad \forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty)$$

$$f(x) < 0 \quad \forall x \in]-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0[\quad f(x) = 0 \text{ se } x = 0, 1.$$



Asintoti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \lg(x + \sqrt{|x^2-1|}) = +\infty \quad \text{A asintoto orizzontale}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x + \sqrt{x^2-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = 0 \quad \text{As. obliqui}^{(2)}$$

Tolgo il valore assoluto perché $x^2-1 > 0$ per $x \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}} \lg(x + \sqrt{x^2-1}) \stackrel{y \rightarrow 0^+}{=} \lim_{y \rightarrow 0^+} \lg y = -\infty \quad x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ as. as. verticale}$$

Studio delle derivate prime

$$y' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2-1}} \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \cdot \frac{x^2-1}{x} \right) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} & \text{se } x^2-1 > 0 \wedge x \in \text{ID} \Leftrightarrow x > 1 \\ \frac{\sqrt{1-x^2}-x}{(x+\sqrt{1-x^2})\sqrt{1-x^2}} & \text{se } x^2-1 < 0 \wedge x \in \text{ID} \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} < x < 1 \end{cases}$$

$$\text{ID}(y') = \text{ID}(y) - \{1\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} y' = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1-x^2}-x}{(x+\sqrt{1-x^2})\sqrt{1-x^2}} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$\Rightarrow x=1$ pto cuspidale

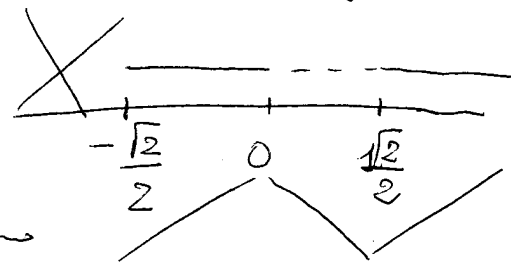
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} y' = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

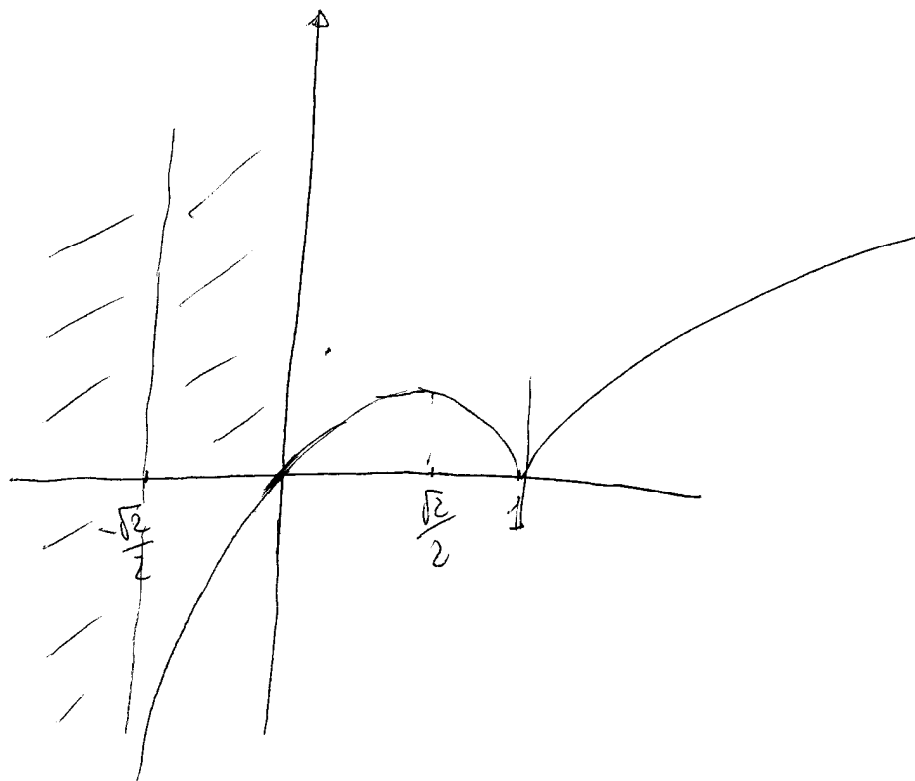
$$y' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} -\frac{\sqrt{2}}{2} < x < 1 \\ \sqrt{1-x^2}-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1 \vee \begin{cases} -\frac{\sqrt{2}}{2} < x < 1 \\ \sqrt{1-x^2} > x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x > 1 \vee \begin{cases} -\frac{\sqrt{2}}{2} < x < 1 \\ x < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 0 \\ 1-x^2 > x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1 \vee \begin{cases} -\frac{\sqrt{2}}{2} < x < 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Dunque $y' > 0 \Leftrightarrow x > 1 \vee -\frac{\sqrt{2}}{2} < x < 0$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \text{ pto di massimo} \quad \begin{cases} x=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y=\lg \sqrt{2} = \frac{1}{2} \lg 2 \end{cases} \text{ pto di minimo}$$





Studio delle derivate seconde

Se $x > 1$: $y'' = \Delta \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = -\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} < 0 \Rightarrow f$ concava

Se $-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < 1$ il calcolo di y'' è lungo, ma si intuisce che f è concava anche in questo intervallo perché lo è se x è vicino a $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ o a 1.

2. Si osserva che $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x^\alpha} - 1 = \begin{cases} +\infty & \text{con ord. grande se } \alpha < 0 \\ e-1 & \text{se } \alpha = 0 \\ 0 & \text{con ordine } \alpha \text{ se } \alpha > 0 \end{cases}$

mentre $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sinh^\beta x = \begin{cases} +\infty & \text{con ord. } \beta & \text{se } \beta < 0 \\ 1 & & \text{se } \beta = 0 \\ 0 & \text{con ord } \beta & \text{se } \beta > 0 \end{cases}$

Segue che

Se $\alpha < 0$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ con ord. comunque grande $\Rightarrow$ f non è integrabile in $]0,1[$.

Se $\alpha = 0$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e-1}{\text{sen}^\beta x} = \begin{cases} 0 & \beta < 0 \\ e-1 & \beta = 0 \\ +\infty \text{ con ord } \beta & \beta > 0 \end{cases}$

quindi f è 1 -reg. se $\alpha = 0 \wedge \beta < 1$ (se $\alpha = 0 \wedge \beta \leq 0$ f converge quindi 1 -reg; se $\alpha = 0 \wedge \beta < 1$ f diverge con ord. < 1 quindi 1 -reg. x criterio dell'ordine); f non è 1 -reg. se $\alpha = 0 \wedge \beta \geq 1$.

Se $\alpha > 0$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^\alpha}{\text{sen}^\beta x} = \begin{cases} \frac{0}{+\infty} = 0 & \text{se } \beta < 0 \\ \frac{0}{1} = 0 & \text{se } \beta = 0 \\ \frac{0}{0} = \begin{cases} 0 & \alpha > \beta > 0 \\ 1 & \alpha = \beta \\ +\infty & \alpha < \beta \end{cases} \end{cases}$

quindi f è 1 -reg. in $]0, 1]$ se $\beta < \alpha + 1$ con ord $\beta - \alpha$
(se $\beta \leq 0$ f converge quindi è integrabile, se $\beta > 0$ ma $\beta < \alpha + 1$ f diverge con ord < 1 quindi è 1 -reg. per criterio dell'ordine).

Conclusione f è integrabile in s.i. in $]0, 1]$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \ni \begin{cases} \alpha \geq 0 \\ \beta < \alpha + 1 \end{cases}$

3. Poiché se $x \rightarrow 0$ si ha

$\text{arctg}(x(e^x - 1)) \sim x(e^x - 1) \sim x^2;$

$\text{sen}(\cos x - e^x) \sim \cos x - e^x = \cos x - 1 + 1 - e^x \sim -\frac{x^2}{2} - x \sim -x;$

$\text{arctg}(\text{arctg}(x(\cos x - 1))) \sim \text{arctg}(x(\cos x - 1)) \sim x \cdot (-\frac{x^2}{2}) = -\frac{x^3}{2};$

$\text{sen } x \sim x, \text{ arcosen } x \sim x$, il limite diventa

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{x \cdot (-\frac{x^3}{2}) + x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{x} = -1$

x principio di sostituzione degli infinitesimi

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \sin x} + 2 \cos(\sin x) - 3}{\arctan x \sin(x \lg(x+1)(e^x - 1)) + x} \stackrel{H}{=}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \sin x} (\sin x + x \cos x) - 2 \sin(\sin x) \cdot \cos x}{\frac{1}{1+x^2} \sin(x \lg(x+1)(e^x - 1)) + \arctan x \left[\cos(x \lg(x+1)(e^x - 1)) (\lg(x+1)(e^x - 1) + \frac{x}{1+x} (e^x - 1) + x \lg(x+1)e^x) \right] + 1}$$

$$= \frac{0}{1} = 0.$$

$$5. \text{Dom}(f): \sqrt{\frac{x+3}{x^2}} > 0 \Rightarrow \begin{cases} x > -3 \\ x \neq 0 \end{cases} \quad \text{Dom}(f) =]-3, 0[\cup]0, +\infty[.$$

$$\text{Poiché } \lim_{x \rightarrow 0^\pm} f(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \lg y = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \lg y = -\infty$$

segue che per Bolzano f sicuramente assume tutti i valori compresi fra $-\infty$ e $+\infty$ quando $-3 < x < 0$ e quindi la maggior regione $\text{codom}(f) = \mathbb{R}$. Insieme anche $\text{codom}(f|_{]0, +\infty[}) = \mathbb{R}$ essendo $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$.

$$6. \text{Poiché } w \bar{w} = x^2 + y^2 \quad \text{dove } w = x + iy$$

$$\text{mentre } \text{Im}(w(2-i)) \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \frac{1}{4i} = -\frac{i}{4} \quad \text{segue che}$$

l'equazione non ammette soluzioni essendo il primo

membro reale mentre il 2° membro immaginario puro.