

COMPITO DI ISTITUZIONI DI MATEMATICHE I

C.d.L. Chimica

(03/02/2009)

Esercizio 1. Studiare la funzione

$$f(x) = \log(|x| + \sqrt{|x^2 - 1|})$$

e disegnarne il grafico approssimativo.

Esercizio 2. Stabilire per quali valori dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ la seguente funzione è integrabile nell'intervallo $]0, 1]$

$$f(x) = \frac{\arctang(x^\alpha)}{(1 - \cos(x))^\beta}.$$

Esercizio 3. Senza utilizzare il Teorema di de l'Hopital calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \sin(x)} + 2 \cos(\sin(x)) - 3}{\arctang(x) \sin(x \log(x+1)(e^x - 1)) + x}.$$

Esercizio 4. Utilizzando il Teorema di de l'Hopital calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctang(x(e^x - 1)) + \sin(\cos(x) - e^x)}{\sin(x) \arctang(\arctang(x)(\cos(x) - 1)) + \arcsen(x)}.$$

Esercizio 5. Assegnata la funzione

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} \sqrt{|x+5|} - 4$$

si calcoli $\text{Dom}(f)$, $\text{Codom}(f)$ e $\text{Codom}(f|_{]0, \infty[})$.

Esercizio 6. Risolvere la seguente equazione in campo complesso

$$w\bar{w} - \text{Re}(\bar{w}(2 - i)) = -\frac{i}{4}.$$

NOTA BENE: coloro che fanno il secondo esonero devono risolvere gli esercizi 1, 2, 3.

Svolgimento

1. ID $|x| + \sqrt{|x^2 - 1|} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(la somma di 2 quantità positive è sempre ≥ 0 e si annulla solo se si annullano contemporaneamente i due membri, in tal caso solo se $\begin{cases} |x| = 0 \\ \sqrt{|x^2 - 1|} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$ mai)

quindi $ID = \mathbb{R}$

$f(x) = f(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ è pari. Possiamo studiarla solo per $x \geq 0$ e poi ribaltare rispetto all'asse y

$f(x) > 0 \Leftrightarrow |x| + \sqrt{|x^2 - 1|} > 1 \quad \text{Se } x \geq 0 \text{ studio:}$

$x + \sqrt{|x^2 - 1|} > 1 \Rightarrow \sqrt{|x^2 - 1|} > 1 - x \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x \geq 0 \\ |x^2 - 1| > 1 - 2x + x^2 \end{cases} \vee \begin{cases} 1 - x < 0 \\ |x^2 - 1| \geq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x^2 - 1 > 1 - 2x + x^2 \vee x^2 - 1 \leq -(1 - 2x + x^2) \end{cases} \vee \begin{cases} x > 1 \\ \forall x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x > 1 \vee 0 < x < 1 \end{cases} \vee x > 1 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1 \vee x > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$

$f(x) > 0 \quad \forall x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$

$(0, 0) \quad (1, 0)$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$

intersezioni con assi

Asintoti $\nexists$ asintoti verticali perché f è continua in $\mathbb{R}$

$\nexists$ Asintoti orizzontali perché

$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \lim_{y \rightarrow \pm \infty} \lg y = \pm \infty$, Infine $\nexists$ as. obliqui perché

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lg(x + \sqrt{x^2 - 1})}{x} = 0 \quad \text{per gli ocoli} \quad (2)$$

0 per L'Hôpital.

$$y' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 1}} \cdot \frac{x^2 - 1}{|x^2 - 1|} \cdot 2x \right) \quad \forall x > 0 \quad x \neq 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y' = 1 \quad \text{Per simmetria rispetto asse } y: \lim_{x \rightarrow 0^-} y' = -1$$

$x=0$ pto angolare per f

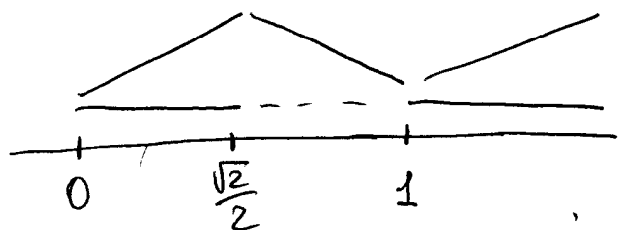
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} y' = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \right) = +\infty \quad x=1 \text{ pto cuspidale per } f$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} y' = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \right) = -\infty$$

$$y' > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \cdot \frac{x^2 - 1}{|x^2 - 1|} \right) > 0 \Leftrightarrow \text{poiché } x + \sqrt{x^2 - 1} > 0 \quad \forall x > 0$$

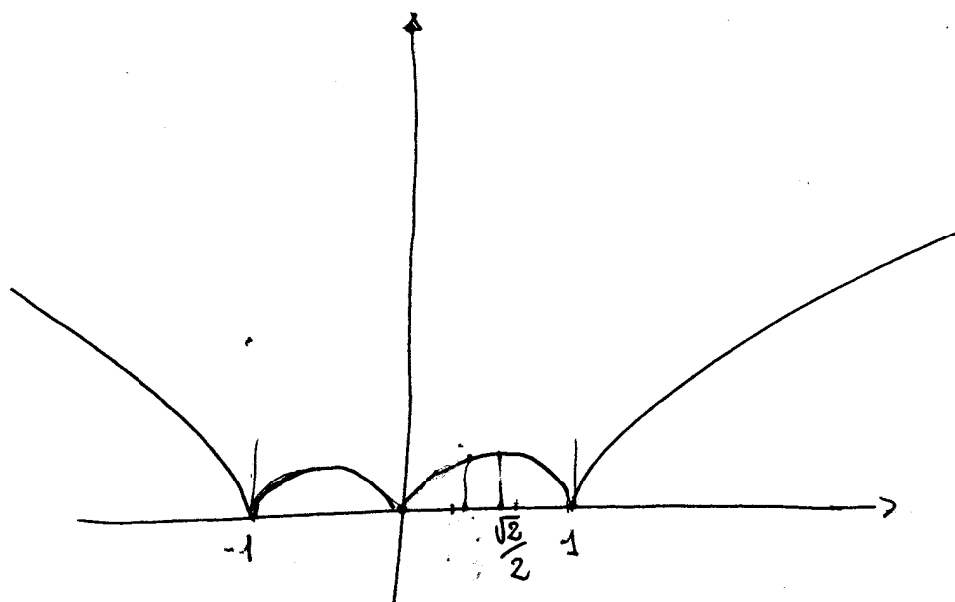
$$\begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2 - 1 < 0 \\ 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \forall x > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x < \sqrt{x^2 + 1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x > 1 \vee \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x^2 < -x^2 + 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x > 1 \vee 0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$$



f cresce in $[0, \frac{\sqrt{2}}{2}]$ e in $[1, +\infty)$
 decresce in $[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ pto di minimo (x simmetrica)} \\ \begin{cases} x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = \frac{1}{2} \lg 2 \end{cases} \text{ pto di max} \quad \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 0 \end{cases} \text{ pto di minimo}$$



Perché

$$y' = \begin{cases} \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} & \text{se } x > 1 \\ \frac{1}{x + \sqrt{-x^2 + 1}} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{-x^2 + 1}} \right) = \frac{1 - 2x\sqrt{1 - x^2}}{(-2x^2 + 1)\sqrt{-x^2 + 1}} & \text{se } 0 < x < 1 \end{cases}$$

si ha

$$y'' = \begin{cases} -\frac{x}{(\sqrt{x^2 - 1})^3} & x > 1 \\ \text{---} & 0 < x < 1 \end{cases}$$

Dunque $y'' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{x}{(\sqrt{x^2 - 1})^3} > 0 \\ x > 1 \end{cases} \vee \begin{cases} \text{---} \\ 0 < x < 1 \end{cases}$

$\emptyset$

Perché lo studio delle derivate seconda è complicato per $0 < x < 1$, lo ometto. Si può vedere però dai conti che

$y'' < 0$ se x piccolo ~~positivo~~, dunque f è strettamente concava in $]0, 1[$ e in $]1, +\infty[$.

2. Poiché $\arctg x^\alpha \sim x^\alpha$ e $(1 - \cos x)^\beta \sim \left(\frac{x^2}{2}\right)^\beta$ per $x \rightarrow 0$ (4)

segue che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^\alpha}{x^{2\beta}} \cdot 2^\beta = 2^\beta \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\alpha - 2\beta} = \begin{cases} 0 & \alpha > 2\beta \\ 2^\beta & \alpha = 2\beta \\ +\infty & \alpha < 2\beta \end{cases}$$

Se $\alpha \geq 2\beta$ $\exists \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \in \mathbb{R}$, quindi f è prolungabile per continuità

in 0 e perciò f è integrabile in $]0, 1[$.

Se $\alpha < 2\beta$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ con ordine $2\beta - \alpha$, perciò f è integrabile in $]0, 1[$ se $2\beta - \alpha < 1$ e non è integrabile se $2\beta - \alpha \geq 1$.

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \sin x} + 2 \cos(\sin x) - 3}{\arctg x \sin(x \lg(x+1)(e^x - 1)) + x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{\cancel{x} \cdot \cancel{x^3} + x}$
 Trascuro x^4 infinitesimo di ordine 4
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x} = 0$

poiché $e^{x \sin x} - 1 \sim x \sin x \sim x^2$ $2(\cos(\sin x) - 1) \sim -2 \frac{\sin^2 x}{2}$

$\arctg x \sim x$ $\sin(x \lg(x+1)(e^x - 1)) \sim x \lg(x+1)(e^x - 1) \sim x \cdot x \cdot x$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg(x(e^x - 1)) + \sin(\cos x - e^x)}{\sin x \arctg(\arctg x (\cos x - 1)) + \arcsin x} \stackrel{H}{=}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x^2(e^x-1)^2} (1+e^x-1) + x e^x + \cos(\cos x - e^x) (-\sin x - e^x)}{\cos x \cdot \arctg(\arctg x (\cos x - 1)) + \sin x \cdot \frac{\frac{1}{1+x^2} (\cos x - 1) - \arctg x \cdot \cos x}{1 + \arctg^2 x (\cos x - 1)^2} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$

$= \frac{0 + \cos(\cos 1 - 1) \cdot 0}{\arctg(0) + 0 + 1} = \frac{0}{1} = 0.$

$$5. ID: \begin{cases} x \neq 0 \\ |x+5|-4 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow |x+5| \geq 4 \Rightarrow$$

$$x+5 \leq -4 \vee x+5 \geq 4 \Rightarrow x \leq -9 \vee x \geq -1$$

$$ID = (-\infty, -9] \cup [-1, +\infty) - \{0\}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -9} f(x) = e^{-\frac{1}{9}} \cdot 0 = 0 = f(-9)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \frac{1}{e} = f(-1) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2} \sqrt{|x+5|-4} \right) + e^{\frac{1}{x}} \frac{1}{2\sqrt{|x+5|-4}} \cdot \frac{x+5}{|x+5|} \quad \forall x \in ID, x \neq -9, -1$$

$$f' = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{x}} \left[-\frac{1}{x^2} \sqrt{|x+5|-4} + \frac{1}{2\sqrt{|x+5|-4}} \cdot \frac{x+5}{|x+5|} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -5 \\ -\frac{2}{x^2} (x+1) + 1 = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x < -5 \\ -\frac{2}{x^2} (-x-9) + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x > -5 \\ x^2 - 2x - 2 = 0 \\ 1 \pm \sqrt{3} \text{ acc} \end{cases} \vee \begin{cases} x < -5 \\ x^2 + 2x - 18 = 0 \\ 1 + \sqrt{19} \text{ non acc} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$x = 1 \pm \sqrt{3} \quad f'(1+\sqrt{3}) = e^{\frac{1}{1+\sqrt{3}}} \sqrt{2+\sqrt{3}}$$

$$f'(1-\sqrt{3}) = e^{\frac{1}{1-\sqrt{3}}} \sqrt{2-\sqrt{3}}$$

Segue da $\inf_{\text{min}} f = 0$, $\sup f = +\infty$ e quindi $\text{codom } f = [0, +\infty)$,
mentre $\text{codom } f|_{[0, +\infty)} = [e^{\frac{1}{1+\sqrt{3}}} \sqrt{2+\sqrt{3}}, +\infty)$.

6. Posto $w = x + iy$ si ha

$$x^2 + y^2 - \operatorname{Re}((x-iy)(2-i)) = -\frac{i}{4}$$

Perché il 1° membro è
tutto reale $\forall x, y$ mentre
il secondo è immaginario
l'eq. non ha soluzioni.