

ESONERO DI ISTITUZIONI DI MATEMATICHE I
C.d.L. Chimica
(12/01/2009)

Esercizio 1. Calcolare il dominio della seguente funzione

$$f(x) = \sqrt{\frac{\arccos(\log(x))}{\sqrt{x-e}}}.$$

Esercizio 2. Risolvere la seguente equazione in campo complesso

$$w^4 + \left(1 + \frac{2}{i}\right)w^2 + \frac{2}{i} = 0.$$

Esercizio 3. Utilizzando i limiti notevoli calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(e^{\cos(x)} - e) \log(\arctang(x) + e^x)}{(\sqrt{\cos(x)} - e^x) \log(\cos(x))}.$$

Esercizio 4. Data la funzione

$$f(x) = \log \left(\arctang \left(\arcsen \left(\frac{e^{\arctang(x)}}{\tan(x) + \sqrt{2}} \right) \right) \right),$$

- 1) calcolare la derivata di f ;
- 2) scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = 0$.

Esercizio 5. Utilizzando il Teorema di de l'Hopital calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsen(e^{\arctang(e^x - 1)} - 1 - \log(\cos(\sin(e^x - 1))))}{\arctang(e^{\sin(\log(x+1))} - \arccos(\log(x+1)))}.$$

Esercizio 6. Determinare il dominio ed codominio della funzione

$$f(x) = \arctang \left(\frac{x^2}{|x+1|} - 4 \right).$$

f è continua? limitata? derivabile?

$$1. \begin{cases} \frac{\arccos(\lg x)}{\sqrt{x-e}} \geq 0 \\ -1 \leq \lg x \leq 1 \\ x > e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \arccos(\lg x) \geq 0 \\ e^{-1} \leq x \leq e \\ x > e \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{il sistema non ha} \\ \text{soluzioni perché le 2}^\circ \text{ e} \\ \text{le 3}^\circ \text{ eq. sono incompatibili} \end{array}$$

$$ID(\neq) = \emptyset$$

$$2. \omega^2 = z \quad z^2 + \left(1 + \frac{2}{i}\right)z + \frac{2}{i} = 0 \quad z_{\frac{1}{2}} = \frac{-(1 + \frac{2}{i}) \pm \sqrt{(1 + \frac{2}{i})^2 - \frac{8}{i}}}{2}$$

$$\text{Poiché } \Delta = 1 + \frac{4}{i^2} + \frac{4}{i} - \frac{8}{i} = 1 + \frac{4}{i^2} - \frac{4}{i} = \left(1 - \frac{2}{i}\right)^2 \text{ segue che}$$

$$z_{\frac{1}{2}} = \frac{-(1 + \frac{2}{i}) \pm (1 - \frac{2}{i})}{2} = \begin{cases} \frac{-1 + \frac{2}{i} - 1 + \frac{2}{i}}{2} = -1 \\ \frac{-1 - \frac{2}{i} + 1 - \frac{2}{i}}{2} = -\frac{2}{i} = 2i \end{cases}$$

$$\omega^2 = -1 \Rightarrow \omega = \pm i$$

$$\omega^2 = 2i = 2\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \omega = \left\{ \sqrt{2} \left(\cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2} \right) \right. \\ \left. k=0,1 \right\}$$

$$\text{ovvero } \omega = \pm \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \pm (1+i)$$

L'equazione assegnata ha 4 radici: $\{\pm i, \pm(1+i)\}$.

Altro modo di risolvere l'esercizio:

$$\omega^4 + \left(1 + \frac{2}{i}\right)\omega^2 + \frac{2}{i} = 0 \Leftrightarrow \omega^4 + (1-2i)\omega^2 - 2i = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\omega^4 + \omega^2) - 2i(\omega^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow (\omega^2 - 2i)(\omega^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\omega^2 = 2i \vee \omega^2 = -1 \text{ e continuando come sopra si trovano le}$$

$$4 \text{ radici } \{\pm i, \pm(1+i)\}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin(e^{\cos x} - e)}{e^{\cos x} - e} \cdot \frac{e(e^{\cos x - 1} - 1)}{\cos x - 1} \cdot \frac{\cos x - 1}{x^2} \cdot \frac{\lg[e^x(1 + \frac{\arctg x}{e^x})]}{x}}{\frac{(\sqrt{\cos x} - 1 + 1 - e^x) \cdot \lg(\cos x - 1 + 1)}{x} \cdot \frac{\cos x - 1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overset{\rightarrow 1}{\frac{\sin(e^{\cos x} - e)}{e^{\cos x} - e}} \cdot e \cdot \overset{\rightarrow +1}{\frac{e^{\cos x - 1} - 1}{\cos x - 1}} \cdot \left(\frac{x + \frac{\lg(1 + \frac{\arctg x}{e^x})}{x}}{x} \right)}{\underbrace{\left(\frac{\sqrt{\cos x} - 1}{x} - \frac{e^x - 1}{x} \right)}_{\substack{\downarrow 0 \\ -1}} \cdot \underbrace{\frac{\lg(\cos x - 1 + 1)}{\cos x - 1}}_{\substack{\downarrow 1 \\ -1}}}$$

$$= \frac{1 \cdot e \cdot 1(1+1)}{-1 \cdot 1} = -2e$$

essendo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(e^{\cos x} - e)}{e^{\cos x} - e} = \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ y = e^{\cos x} - e}} \frac{\sin y}{y} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\cos x - 1} - 1}{\cos x - 1} = \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ y = \cos x - 1}} \frac{e^y - 1}{y} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg(1 + \frac{\arctg x}{e^x})}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg(1 + \frac{\arctg x}{e^x})}{\frac{\arctg x}{e^x}} \cdot \frac{\arctg x}{x} \cdot \frac{1}{e^x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{\cos x} - 1)(\sqrt{\cos x} + 1)}{x(\sqrt{\cos x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x(\sqrt{\cos x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{\cos x} + 1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg(\cos x - 1 + 1)}{\cos x - 1} = \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ y = \cos x - 1}} \frac{\lg(1 + y)}{y} = 1$$

$$4. f'(x) = \frac{1}{\arctg(\arcsin(\frac{e^{\arctg x}}{\sqrt{x + \sqrt{2}}}))} \cdot \frac{1}{1 + \arcsin^2(\frac{e^{\arctg x}}{\sqrt{x + \sqrt{2}}})} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{e^{\arctg x}}{\sqrt{x + \sqrt{2}}})^2}} \cdot \frac{e^{\arctg x} \cdot \frac{1}{1+x^2}(\sqrt{x + \sqrt{2}}) - e^{\arctg x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}}{(\sqrt{x + \sqrt{2}})^2}$$

$$2. \text{ Poiché } f(0) = \lg(\operatorname{arctg}(\operatorname{arcsen} \frac{1}{\sqrt{2}})) = \lg(\operatorname{arctg} \frac{\pi}{4})$$

(3)

$$f'(0) = \frac{1}{\operatorname{arctg} \frac{\pi}{4}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\pi^2}{16}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}}} \cdot \frac{\sqrt{2} - 1}{2}$$

l'eq. della retta tangente in $x_0 = 0$ è

$$y - \lg(\operatorname{arctg} \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2} - 1}{(\operatorname{arctg} \frac{\pi}{4})(1 + \frac{\pi^2}{16})\sqrt{2}} x$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arcsen}(e^{\operatorname{arctg}(e^x - 1)} - 1 - \lg(\cos(\operatorname{sen}(e^x - 1))))}{\operatorname{arctg}(e^{\operatorname{sen}(\lg(x+1))} - \operatorname{arccos}(\lg(x+1)))} = \frac{0}{0}$$

$$\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\operatorname{arctg}(e^x - 1)} \cdot \frac{1}{1 + (e^x - 1)^2} \cdot e^x + \frac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(e^x - 1)) \cdot \cos(e^x - 1) \cdot e^x}{\cos(\operatorname{sen}(e^x - 1))}}{\frac{\sqrt{1 - (e^{\operatorname{arctg}(e^x - 1)} - 1 - \lg(\cos(\operatorname{sen}(e^x - 1))))^2}}{e^{\operatorname{sen}(\lg(x+1))} \cdot \cos(\lg(x+1)) \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{1}{\sqrt{1 - \lg^2(x+1)}} \cdot \frac{1}{x+1}}} =$$

$$= \frac{\frac{1 \cdot \frac{1}{1+0} \cdot 1 + 0}{\sqrt{1-0}}}{\frac{1 \cdot 1 \cdot 1 + 1}{1 + (1-0)^2}} = \frac{1}{2}$$

$$6. \text{ID}(f) = \mathbb{R} - \{-1\} \quad \lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \frac{e}{y \rightarrow +\infty} \quad \operatorname{arctg} y = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \frac{e}{y \rightarrow +\infty} \quad \operatorname{arctg} y = \frac{\pi}{2}$$

$$f' = \frac{1}{1 + (\frac{x^2}{|x+1|} - 1)^2} \cdot \frac{2x|x+1| - x^2 \frac{x+1}{|x+1|}}{(x+1)^2} \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}$$

$$\text{ID}(f) = \text{ID}(f')$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 2x(x+1)^2 - x^2(x+1) = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 + 2x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -2$$

$$f(0) = \operatorname{arctg}(-4) < 0 \quad f(-2) = \operatorname{arctg} 0 = 0$$

Poiché f è continua in $(-\infty, -1[$, per Bolzano

(4)

$f((-\infty, -1[) = [0, \frac{\pi}{2}[$; analogamente poiché f è continua su $]-1, +\infty)$ per Bolzano $f(]-1, +\infty)) = [\arctg(-4), \frac{\pi}{2}[$.

Poiché $\arctg(-4) < 0$, il codominio di f è $[\arctg(-4), \frac{\pi}{2}[$.

f è continua perché composta e rapporto di funzioni continue.

f è limitata con $\min f = \arctg(-4)$ e $\sup f = \frac{\pi}{2}$.

f è derivabile perché composta e rapporto di funzioni derivabili in tutto $ID = \mathbb{R} - \{-1\}$.