

COMPITO DI ISTITUZIONI DI MATEMATICHE I
C.d.L. Chimica
(01/10/2008)

Esercizio 1. Studiare la funzione

$$f(x) = 2|x - 1| \log \left(2 - e^{\frac{1}{2|x-1|}} \right)$$

e disegnarne il grafico approssimativo.

Esercizio 2. Dire, giustificando le risposte, se la funzione

$$f(x) = \frac{\log(\log(x+1))(e^{x-1} - 1)}{\sqrt{|x^2 + x|^3}}$$

è integrabile negli intervalli $]0, 1]$, $[1, +\infty[$.

Esercizio 3. Senza utilizzare il Teorema di de l'Hopital calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tang}(\text{sen}(x)) \log(\text{tang}(x)) - \cos(e^x - 1) + 1}{\sqrt{|e^x - 1|}(\cos(\text{arctang}(x)) - 1)}.$$

Esercizio 4. Utilizzando il Teorema di de l'Hopital calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tang}(\cos(x)) - \text{tang}(e^{-x})}{\cos(\text{tang}(x)) - e^{-\text{tang}(x)}}.$$

Esercizio 5. Risolvere la seguente equazione in campo complesso

$$\left(-\frac{i+1}{i-1}i + \left(\frac{i+1}{i-1} \right)^8 \right) |w|^2 \bar{w}^2 = - \left(\frac{i+1}{i-1} \right)^6.$$

1. ID. $2 - e^{\frac{1}{2|x-1|}} > 0 \Rightarrow e^{\frac{1}{2|x-1|}} < 2 \Rightarrow \frac{1}{2|x-1|} < \lg 2$ (1)

$$\frac{1}{|x-1|} < \lg 4 \Rightarrow |x-1| > \frac{1}{\lg 4} \Rightarrow x < 1 - \frac{1}{\lg 4} \vee x > 1 + \frac{1}{\lg 4}$$

ID = $(-\infty, 1 - \frac{1}{\lg 4} [\cup] 1 + \frac{1}{\lg 4}, +\infty)$ Il grafico di f è simmetrico rispetto alla retta $x=1$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=2 \lg(2-\sqrt{e}) \end{cases} \quad \begin{cases} y=0 \\ x=1 \text{ N.A.} \end{cases} \quad \vee \quad 2 - e^{\frac{1}{2|x-1|}} = 1 \Rightarrow e^{\frac{1}{2|x-1|}} = 1 \Rightarrow \frac{1}{2|x-1|} = 0$$

$$y > 0 \Leftrightarrow 2 - e^{\frac{1}{2|x-1|}} > 1 \Rightarrow e^{\frac{1}{2|x-1|}} < 1 \Rightarrow \frac{1}{2|x-1|} < 0 \text{ imposs.}$$

f è sempre negativa nel suo ID.

$$\lim_{x \rightarrow 1 \pm \frac{1}{\lg 4}} f(x) = \lim_{\lg 4 y \rightarrow 0^+} 2 \lg y = -\infty$$

$$x = 1 \pm \frac{1}{\lg 4} \text{ asintoti verticali}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2|x-1| \lg(2 - e^{\frac{1}{2|x-1|}}) = \lim_{1/|x-1|=y} 2 \lg(2 - e^y) \stackrel{y \rightarrow 0}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2 \lg(2 - e^y)}{y} \stackrel{H}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-e^y}{2 - e^y} = -1$$

$$y = -1 \text{ asintoto orizz.}$$

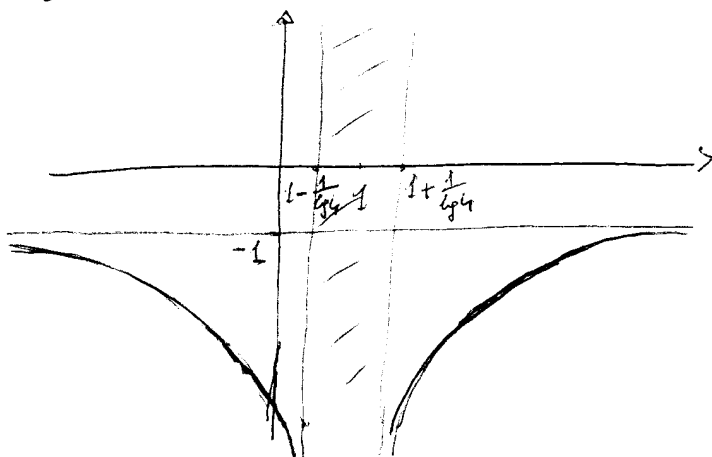
Studio y' per $x > 1 + \frac{1}{\lg 4}$

$$\begin{aligned} y' &= 2 \lg(2 - e^{\frac{1}{2(x-1)}}) + \frac{2(x-1)}{2 - e^{\frac{1}{2(x-1)}}} (-e^{\frac{1}{2(x-1)}})^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{(x-1)^2}\right) = \\ &= 2 \lg(2 - e^{\frac{1}{2(x-1)}}) + \frac{e^{\frac{1}{2(x-1)}}}{(2 - e^{\frac{1}{2(x-1)}})(x-1)} \quad \forall x > 1 + \frac{1}{\lg 4} \end{aligned}$$

Perché y' è somma di 2 addendi di segno opposto, non si riesce a studiare il segno di y' , però si può dedurre che f è stz crescente per $x > 1 + \frac{1}{\lg 4}$ perché prodotto di due funz. stz crescenti e positive (la funz. $x \mapsto \lg(2 - e^{\frac{1}{2(x-1)}})$ è stz cres. perché composta di tre funzioni stz. crescenti e due stz. decrescenti).

Ricordando poi che f è simmetrica rispetto a $x=1$

si ottiene il seguente grafico:



2. f è definita e continua in $]0, +\infty)$. Inoltre (2)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\lg(\lg(x+1))(e^{x-1}-1)}{\sqrt{|x(x+1)|^3}} = \frac{\lg 0}{0^+} \cdot (e^{-1}-1) = \frac{-\infty}{0^+} = +\infty$$

con ordine $> \frac{3}{2} > 1$ essendo $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^{3/2}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \lg(\lg(x+1))(e^{x-1}) = +\infty$

segue che f non è integrabile in $]0, 1]$.

Perché $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (essendo $e^{x-1} = \frac{1}{e} e^x \rightarrow +\infty$ con ordine

comunque grande e quindi maggior di $3 = \text{ord}(x^2+x)^{3/2}$)

f non è integrabile neppure in $[1, +\infty)$.

3. poiché: $\lg(\sin x) \sim \sin x \sim x$ $\lg(\lg x) \sim \lg x$ segue che
 • se $x \rightarrow 0$: $\lg(\sin x) \lg \lg x \sim x \lg x$ che tende a 0 con ord < 1

mentre $-\cos(e^x-1)+1 \sim -\frac{(e^x-1)^2}{2} \approx -\frac{x^2}{2}$ si trascina perché ha ordine 2

Inoltre $\sqrt{|e^x-1|} \sim \sqrt{|x|}$, $\cos(\arcsin x)-1 \sim -\frac{(\arcsin x)^2}{2} = -\frac{x^2}{2}$

e quindi il limite diventa

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \lg x}{\sqrt{x}(-\frac{x^2}{2})} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2 \lg x}{x\sqrt{x}} = \frac{+\infty}{0^+} = +\infty$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg(\cos x) - \lg(e^{-x})}{\cos(\lg x) - e^{-\lg x}} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1-\sin x}{\cos^2(\cos x)} + \frac{1+e^{-x}}{\cos^2(e^{-x})}}{\frac{-\sin(\lg x)}{\cos^2 x} + \frac{e^{-\lg x}}{\cos^2 x}} = \frac{\frac{1}{\cos^2 1}}{1} = \frac{1}{\cos^2 1}$$

$$5. \text{Poiché } \frac{i+1}{i-1} = \frac{(i+1)^2}{-2} = -i, \quad +i \cdot i = -1, \quad (-i)^2 = 1, \quad -(-i)^6 = -(-1) = 1$$

ma $(-1+1)|\omega|^2 \bar{\omega}^2 = 1$ con $0=1$ impossibile

Dunque l'equazione non ha soluzioni.

