

COMPITO DI ISTITUZIONI DI MATEMATICHE I
C.d.L. Chimica
(18/09/2008)

Esercizio 1. Studiare la funzione

$$f(x) = 2(|x| - 1) \log \left(2 - e^{\frac{1}{2(|x|-1)}} \right)$$

e disegnarne il grafico approssimativo.

Esercizio 2. Dire, giustificando le risposte, se la funzione

$$f(x) = \frac{\log(\arctang(x))(e^x - 1)}{\sqrt{|x^2 + x|^3}}$$

è integrabile negli intervalli $]0, 1]$, $[1, +\infty[$.

Esercizio 3. Senza utilizzare il Teorema di de l'Hopital calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctang(e^x - 1) \log(\sin(x)) - \arctang(\cos(x) - 1)}{\sqrt{|\sin(x)|} \log(\cos(x))}.$$

Esercizio 4. Utilizzando il Teorema di de l'Hopital calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctang(e^x) - \arctang(e^{-x})}{e^{\arctang(x)} - e^{-\arctang(x)}}.$$

Esercizio 5. Risolvere la seguente equazione in campo complesso

$$\left(\left(\frac{i+1}{i-1} \right)^2 + \left(\frac{i+1}{i-1} \right)^4 \right) |w|^2 w^2 = \left(\frac{i+1}{i-1} \right)^7 i.$$

(1)

$$1. \quad 2 - e^{\frac{1}{2(|x|-1)}} > 0$$

$$e^{\frac{1}{2(|x|-1)}} < 2$$

$$\frac{1}{2(|x|-1)} < \lg 2$$

$$\frac{1 - (2 \lg 2)(|x|-1)}{2(|x|-1)} < 0$$

$$N > 0$$

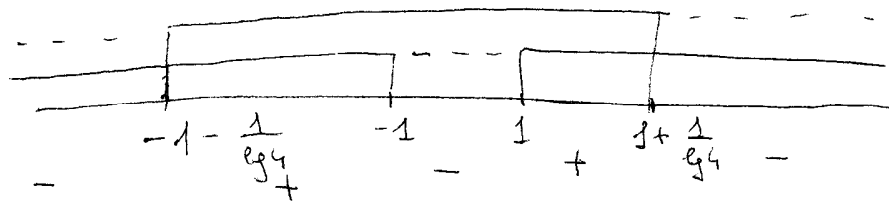
$$|x| \lg 4 - 1 - \lg 4 < 0 \quad |x| < 1 + \frac{1}{\lg 4}$$

$$D > 0$$

$$|x| > 1$$

$$ID = (-\infty, -1 - \frac{1}{\lg 4}] \cup [-1, 1] \cup$$

$$[1 + \frac{1}{\lg 4}, +\infty)$$



$$f(-x) = f(x) \quad \forall x \in ID$$

Studio f per $x \geq 0$ e poi ribatto il grafico rispetto all'asse y

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \lg(2 - e^{-\frac{1}{2}}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ |x| = 1 \vee \lg(2 - e^{\frac{1}{2(|x|-1)}}) = 0 \end{cases}$$

$$x = \pm 1$$

$$2 - e^{\frac{1}{2(|x|-1)}} = 1 \Rightarrow e^{\frac{1}{2(|x|-1)}} = 1 \Rightarrow$$

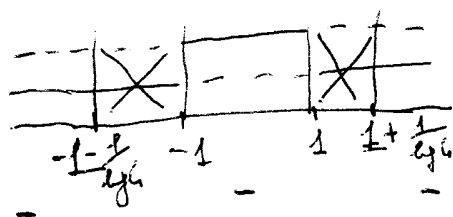
$$(\pm 1, 0) \text{ interse. asse } x$$

$$\frac{1}{2(|x|-1)} = 0 \quad \emptyset$$

$$f(x) > 0 \quad (|x|-1) \lg(2 - e^{\frac{1}{2(|x|-1)}}) > 0 \quad |x| > 1 \Rightarrow x < -1 \vee x > 1$$

$$\lg(2 - e^{\frac{1}{2(|x|-1)}}) > 0 \Rightarrow 2 - e^{\frac{1}{2(|x|-1)}} > 1 \Rightarrow e^{\frac{1}{2(|x|-1)}} < 1$$

$$\Rightarrow 2(|x|-1) < 0 \Rightarrow |x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$$



$$\text{Dunque } f(x) < 0 \quad \forall x \in ID \quad \rightarrow e^{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2(x-1) \lg(2 - e^{\frac{1}{2(x-1)}}) = 0$$

f è prolungabile per continuità in $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow (1 + \frac{1}{\lg 4})^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (1 + \frac{1}{\lg 4})^+} 2(x-1) \lg(2 - e^{\frac{1}{2(x-1)}}) = \frac{2}{\lg 4} (-\infty) = -\infty$$

$$x = 1 + \frac{1}{\lg 4} \quad \text{asintoto verticale}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2(x-1) \lg(2 - e^{\frac{1}{2(x-1)}}) = \lim_{y \rightarrow 0^+} 2 \lg \frac{(2 - e^{\frac{1}{2y}})^H}{y}$$

$$2 \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{2-y} (-\frac{1}{2} e^{\frac{1}{2y}}) = 2 \cdot (-\frac{1}{2}) = -1 \quad y = -1 \text{ Asintoto}$$

$$a + \infty$$

Studio y' per $x > 0$

(2)

$$y' = 2 \lg(2 - e^{\frac{1}{2(x-1)}}) + \frac{2(x-1)}{2 - e^{\frac{1}{2(x-1)}}} \left(-e^{\frac{1}{2(x-1)}} \right) \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{(x-1)^2} \right) =$$

$$= 2 \lg(2 - e^{\frac{1}{2(x-1)}}) + \frac{e^{\frac{1}{2(x-1)}}}{(2 - e^{\frac{1}{2(x-1)}})(x-1)} \quad \forall x \in]0, 1[\cup]1 + \frac{1}{\lg 4}, +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y' = 2 \lg(2 - e^{-\frac{1}{2}}) - \frac{1}{2\sqrt{e}-1} \quad \begin{cases} x=0 \\ y=f(0) \end{cases} \quad \text{pto angolare di } f \quad f'(0) > -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} y' = 2 \lg 2 > 0 \quad \text{perché } \frac{2}{x-1} - \frac{e^{\frac{1}{2(x-1)}}}{x-1} = \frac{0}{0} = 0 \quad \text{per gli ordini}$$

$$\text{Perché } \lg(2 - e^{\frac{1}{2(x-1)}}) > 0 \quad \text{se } 0 < x < 1 \quad \text{e } \frac{e^{\frac{1}{2(x-1)}}}{(2 - e^{\frac{1}{2(x-1)}})(x-1)} > 0 \quad \text{se } x > 1 + \frac{1}{\lg 4}$$

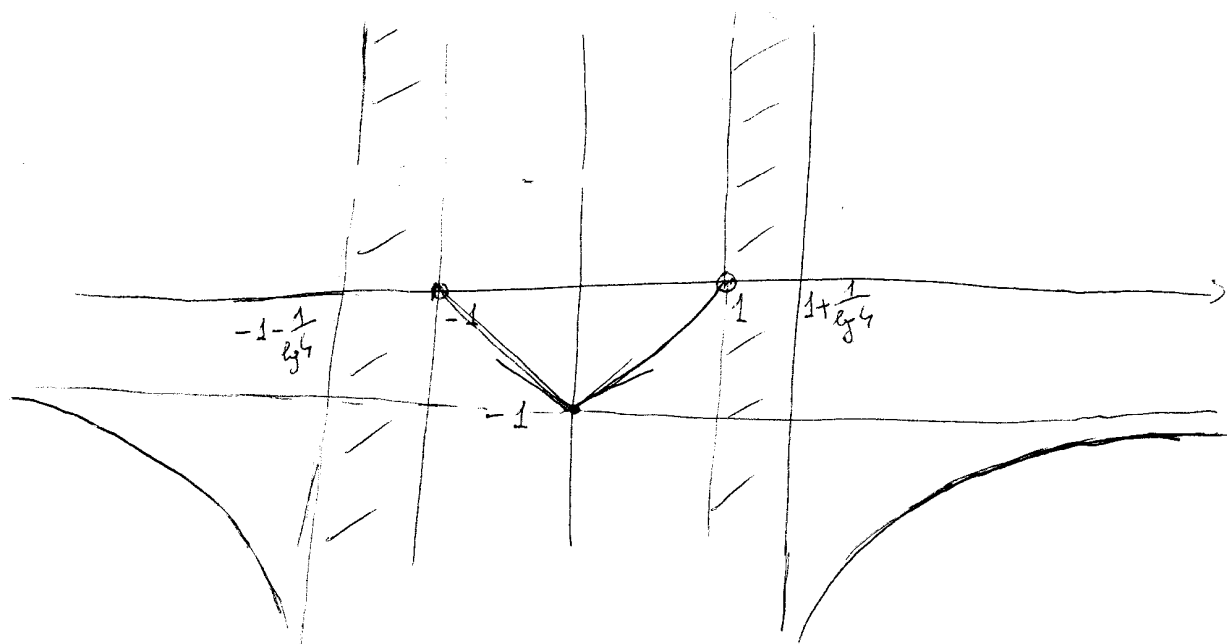
non si riesce a studiare il segno di y' perché somma di 2 addendi opposti
 cerca di studiare la monotonia di f senza usare il segno di y'

Se $x > 1$ f è str. crescente perché prodotto di $f_1(x) = x-1$ str. cr. e pos.
 e $f_2(x) = \lg(2 - e^{\frac{1}{2(x-1)}})$ str. cres. in quanto composta di
 due funz. str. cr. e due funz. str. decr.

$$x \rightarrow x-1 \xrightarrow{\text{cr. pos.}} \frac{1}{2(x-1)} \xrightarrow{\text{dec.}} e^{\frac{1}{2(x-1)}} \xrightarrow{\text{dec.}} 2 - e^{\frac{1}{2(x-1)}} \xrightarrow{\text{cr.}} \lg(2 - e^{\frac{1}{2(x-1)}})$$

Se $0 < x < 1$ non si può concludere perché f_1 è str. cres. neg. e f_2 è str. cres. positiva
 ma essendo $f'_+(0) > 0$ e $f'_-(1) < 0$ posso supporre crescente π .

Ricordando che f è pari, si ottiene il seguente grafico:



2. Poiché f è continua nel suo I.D. = $]0, +\infty[$ e

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\lg(\operatorname{arctg} x) (e^x - 1)}{\sqrt{x^2 + x}^3} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \lg x}{(\sqrt{x})^3} = -\infty \quad \text{essendo per } x \rightarrow 0^+ \text{ con ordine } \alpha > \frac{1}{2} \text{ e } \alpha < \frac{1}{2} + \varepsilon \forall \varepsilon > 0$$

$\lg(\operatorname{arctg} x) \sim \lg x$ infinito di ordine molto basso

$$e^x - 1 \sim x \quad \sqrt{x^2 + x}^3 = \sqrt{(x^2 + x)^3} \sim x^{\frac{3}{2}}$$

segue che f è integrabile in $]0, 1[$.

$$\text{Poiché } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lg(\operatorname{arctg} x) (e^x - 1)}{\sqrt{x^2 + x}^3} = \lg \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3} = +\infty \quad (\text{per gli ordini})$$

segue che f non è integrabile in $[1, +\infty)$.

3. Poiché $\operatorname{arctg}(e^x - 1) \sim e^x - 1 \sim x$, $\operatorname{sen} x \sim x$

$$\text{se } x \rightarrow 0^+: \operatorname{arctg}(\cos x - 1) \sim \cos x - 1 \sim -\frac{x^2}{2}$$

$$\sqrt{|\operatorname{sen} x|} \sim \sqrt{x}, \quad \lg(\cos x) = \lg(1 + \cos x - 1) \cong \cos x - 1 \sim -\frac{x^2}{2}$$

il limite diventa

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \lg x + \frac{x^2}{2}}{\sqrt{x} \cdot (-\frac{1}{2}x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2x \lg x}{\sqrt{x} \cdot x^2} = \frac{+\infty}{0^+} = +\infty$$

N.B. Il limite si può calcolare solo da destra perché $\lg(\operatorname{sen} x)$ è definito se $\operatorname{sen} x > 0$ e quindi in un intorno destro di 0.

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} e^x - \operatorname{arctg} e^{-x}}{e^{\operatorname{arctg} x} - e^{-\operatorname{arctg} x}} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x}{1+e^{2x}} + \frac{e^{-x}}{1+e^{-2x}}}{\frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} + \frac{e^{-\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{1+1} = \frac{1}{2}$$

5. Poiché $\frac{i+1}{i-1} = \frac{(i+1)^2}{i^2-1} = -i$ l'equazione diventa:

$$\begin{array}{ccc} [(-i)^2 + (-i)^4] |w|^2 w^2 = (-i)^7 i \\ \text{"} & \text{"} & \text{"} \\ -1 & 1 & (-i)^3 \\ & & i \end{array}$$

$$0 = i^2 \quad \text{impossibile}$$

cioè l'eq. non ha soluzioni.