

COMPITO DI ISTITUZIONI DI MATEMATICHE I
C.d.L. Chimica
(04/09/2008)

Esercizio 1. Studiare la funzione

$$f(x) = 2(x-1) \left| \log \left(2 - e^{\frac{1}{2(x-1)}} \right) \right|$$

e disegnarne il grafico approssimativo.

Esercizio 2. Dire, giustificando le risposte, se la funzione

$$f(x) = \frac{\log(x)(e^{x-1} - 1)}{\sqrt{|1 - x^2|^3}}$$

è integrabile negli intervalli $]1, 2]$, $[2, +\infty[$.

Esercizio 3. Senza utilizzare il Teorema di de l'Hopital calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(e^x - 1) \log(\operatorname{arctang}(x)) - \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(x)(e^x - 1))}{\sqrt{|\log(x+1)|} \operatorname{arctang}(\operatorname{sen}(e^x - 1))}.$$

Esercizio 4. Utilizzando il Teorema di de l'Hopital calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(e^x) - \operatorname{sen}(e^{-x})}{e^{\operatorname{sen}(x)} - e^{-\operatorname{sen}(x)}}.$$

Esercizio 5. Risolvere la seguente equazione in campo complesso

$$\left(1 + \left(\frac{i+1}{i-1} \right)^4 \right) |\bar{w}|^2 w^2 = \left(\frac{i+1}{i-1} \right)^8.$$

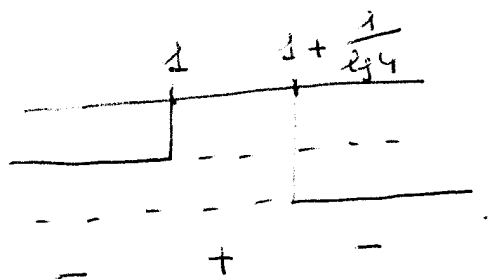
Svolgimento

1. ID $2 - e^{\frac{1}{2(x-1)}} > 0$ $e^{\frac{1}{2(x-1)}} < 2$ $\frac{1}{2(x-1)} < \lg 2$

$$\frac{1 - (2 \lg 2)(x-1)}{2(x-1)} < 0$$

$$N > 0 \quad x \lg 4 - 1 - \lg 4 < 0 \quad x < 1 + \frac{1}{\lg 4}$$

$$D > 0 \quad x - 1 > 0 \quad x > 1$$



$$ID = (-\infty, 1] \cup [1 + \frac{1}{\lg 4}, +\infty)$$

f non è in pari in dispari

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -2 | \lg(2 - e^{-\frac{1}{2}}) | \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \end{cases} \quad \text{Non acc} \quad \forall \quad \lg(2 - e^{\frac{1}{2(x-1)}}) = 0$$

$$2 - e^{\frac{1}{2(x-1)}} = 1 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{2(x-1)}} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2(x-1)} = 0 \quad \text{impossibile}$$

di intersezione con asse x $f(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1 + \frac{1}{\lg 4}$

Asintoti

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} 2(x-1) | \lg(2 - e^{\frac{1}{2(x-1)}}) | = 0 \cdot \lg 2 = 0 \quad \begin{array}{l} \text{f prolungabile} \\ \text{x continua-} \\ \text{in } x = 1 \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow (1 + \frac{1}{\lg 4})^+} 2(x-1) | \lg(2 - e^{\frac{1}{2(x-1)}}) | = \frac{2}{\lg 4} (-\infty) = +\infty \quad \begin{array}{l} \text{As. Verticale} \\ x = 1 + \frac{1}{\lg 4} \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2(x-1) | \lg(2 - e^{\frac{1}{2(x-1)}}) | = -\infty \cdot 0 = -\infty \quad \text{purch-}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2 \frac{| \lg(2 - e^{\frac{1}{2(x-1)}}) |}{\frac{1}{x-1}} = \lim_{y \rightarrow 0^-} 2 \frac{| \lg(2 - e^{\frac{1}{2}y}) |}{y} =$$

$$= 2 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\lg(2 - e^{\frac{1}{2}y})}{y} \stackrel{H}{=} 2 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{2 - e^{\frac{1}{2}y}} \left(-\frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}y} \right) = -\frac{1}{2} \cdot 2 = -1$$

(2)

$y = -1$ Ad. 0482 a $-\infty$

N.B. si è tolto il valore assoluto perché il suo argomento è positivo se $y < 0$ ($\Leftrightarrow x < 1$)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2(x-1) \left| \lg(2 - e^{\frac{1}{2(x-1)}}) \right| \stackrel{y = \frac{1}{x-1}}{=} \lim_{y \rightarrow 0^+} 2 \frac{\lg(2 - e^{\frac{1}{2}y})}{y} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$y = 1$ Ad. 0482. a $+\infty$

$$y' = 2 \left| \lg(2 - e^{\frac{1}{2(x-1)}}) \right| + 2(x-1) \frac{\lg(2 - e^{\frac{1}{2(x-1)}})}{\left| \lg(2 - e^{\frac{1}{2(x-1)}}) \right|} \cdot \frac{-e^{\frac{1}{2(x-1)}} \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{(x-1)^2} \right)}{2 - e^{\frac{1}{2(x-1)}}}$$

$$= 2 \frac{\left[\lg(2 - e^{\frac{1}{2(x-1)}}) \right]^2 (2 - e^{\frac{1}{2(x-1)}}) + (x-1) \lg(2 - e^{\frac{1}{2(x-1)}}) \cdot e^{\frac{1}{2(x-1)}}}{\left| \lg(2 - e^{\frac{1}{2(x-1)}}) \right| (2 - e^{\frac{1}{2(x-1)}})}$$

$$= 2 \frac{\lg(2 - e^{\frac{1}{2(x-1)}}) \left[2(2 - e^{\frac{1}{2(x-1)}})(x-1) \lg(2 - e^{\frac{1}{2(x-1)}}) + e^{\frac{1}{2(x-1)}} \right]}{2 \left| \lg(2 - e^{\frac{1}{2(x-1)}}) \right| (2 - e^{\frac{1}{2(x-1)}})(x-1)}$$

$$ID(y') = ID(y) \quad \text{essendo } \lg(2 - e^{\frac{1}{2(x-1)}}) \neq 0 \quad \forall x \in ID(y)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} y' = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2 \frac{\lg(2 - e^{\frac{1}{2(x-1)}}) \left[2(2 - e^{\frac{1}{2(x-1)}})(x-1) \lg(2 - e^{\frac{1}{2(x-1)}}) + e^{\frac{1}{2(x-1)}} \right]}{2 \left| \lg(2 - e^{\frac{1}{2(x-1)}}) \right| (2 - e^{\frac{1}{2(x-1)}})(x-1)}$$

$\downarrow$ $\lg 2$ $\downarrow$ 0^+ $\downarrow$ 0^-

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2(2 - e^{\frac{1}{2(x-1)}})(x-1) \lg(2 - e^{\frac{1}{2(x-1)}})}{(2 - e^{\frac{1}{2(x-1)}})(x-1)} + \frac{e^{\frac{1}{2(x-1)}}}{(2 - e^{\frac{1}{2(x-1)}})(x-1)} \quad (3)$$

$$= 2 \lg 2 + 0 = 2 \lg 2$$

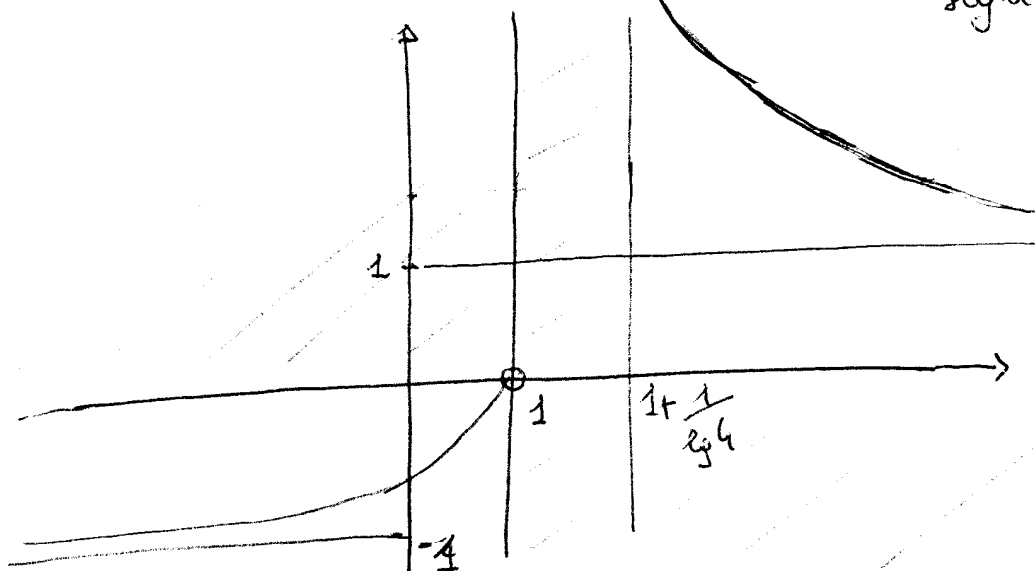
il rapporto $\rightarrow 0$
per gli ordini

Perché $\lim_{x \rightarrow 1^-} y' = 2 \lg 2 \in \mathbb{R}$, non si riesce a capire la concavità vicino 0. Non si può studiare la concavità essendo y'' molto complicata, mentre

$$y' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ \underbrace{\lg(2 - e^{\frac{1}{2(x-1)}})}_{>0} + \frac{e^{\frac{1}{2(x-1)}}}{(2 - e^{\frac{1}{2(x-1)}})(x-1)} > 0 \end{cases}$$

$$V \quad \begin{cases} x > 1 + \frac{1}{\lg 4} \\ - \left[\underbrace{\lg(2 - e^{\frac{1}{2(x-1)}})}_{<0} + \frac{e^{\frac{1}{2(x-1)}}}{(2 - e^{\frac{1}{2(x-1)}})(x-1)} \right] > 0 \end{cases}$$

Non si sa studiare, però dagli altri elementi si deduce il seguente grafico



2. f è integrabile in $]1, 2]$ perché continua e convergente per $x \rightarrow 1^+$. (4)

$$\text{Infatti } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\lg x (e^{x-1} - 1)^{x-1/2}}{\sqrt{|1-x|^3} \sqrt{|1+x|^3}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\lg(t+1) (e^t - 1)}{t^{3/2}} = 0$$

essendo $\text{ord } \lg(t+1) = \text{ord } (e^t - 1) = 1$ per $t \rightarrow 0$.

f non è integrabile in $[2, +\infty)$ perché $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ in quanto $\text{ord}(\text{numeratore})$ è comunque grande perché c'è funz. esponenziale mentre $\text{ord}(\text{denominatore}) = 3$.

3. Per dimostrare che $\arctg x > 0$ cioè $x > 0$ il limite è in realtà un limite destro. Perché per $x \rightarrow 0^+$

$\text{sen}(e^x - 1) \sim e^x - 1 \sim x$, $\lg(\arctg x) \sim \lg x \rightarrow -\infty$ con $\text{ord} \text{plac}$

$\text{sen}(\text{sen } x (e^x - 1)) \sim \text{sen } x (e^x - 1) \sim x \cdot x = x^2$

$$\sqrt{|\lg(x+1)|} \sim \sqrt{|x|} = \sqrt{x}$$

$$\arctg(\text{sen}(e^x - 1)) \sim \text{sen}(e^x - 1) \sim e^x - 1 \sim x$$

segue da, perché $\text{ord}(\text{sen}(e^x - 1) \lg(\arctg x)) < 1$, $\text{ord } \text{sen}(\text{sen } x (e^x - 1)) = 2$

e $\text{ord}(\text{denominatore}) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$, il limite finale è

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\text{sen}(e^x - 1) \lg(\arctg x) - \text{sen}(\text{sen } x (e^x - 1))}{\sqrt{|\lg(x+1)|} \arctg(\text{sen}(e^x - 1))} = -\infty$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } e^x - \text{sen } e^{-x}}{e^{\text{sen } x} - e^{-\text{sen } x}} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\text{sen } x} \cos e^x + e^{-\text{sen } x} \cos e^{-x}}{e^{\text{sen } x} \cdot \cos x + e^{-\text{sen } x} \cdot \cos x} = \frac{2 \cos 1}{2} = \cos 1.$$

5. Perché $\frac{i+1}{i-1} = \frac{(i+1)^2}{i^2-1} = -i$ e' eq. diente $2/|w|^2 w^2 = 1$ cioè

$$2(x^2 + y^2)(x + iy)^2 = 1 \Leftrightarrow 2(x^2 + y^2)(x^2 - y^2 + 2xyi) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x^2 + y^2)(x^2 - y^2) = 1 \\ 4xy(x^2 + y^2) = 0 \\ x = 0 \vee y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ -2y^4=1 \\ \emptyset \end{cases} \vee \begin{cases} y=0 \\ 2x^4=1 \\ x = \pm \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \end{cases}$$

Le soluzioni sono $w = \pm \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$.

