

COMPITO DI ISTITUZIONI DI MATEMATICHE I
C.d.L. Chimica
(17/07/2008)

Esercizio 1. Studiare la funzione

$$f(x) = \operatorname{arctang} \left| \frac{1 - \log(x)}{1 + \log(x)} \right|$$

e disegnarne il grafico approssimativo.

Esercizio 2. Dire, giustificando le risposte, se la funzione

$$f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{\sqrt{|1-x^2|^3}}$$

è integrabile negli intervalli $[0, 1[$, $]1, 2]$, $[2, +\infty[$.

Esercizio 3. Senza utilizzare il Teorema di de l'Hopital calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\cos(x)) - e^{\operatorname{arctang}(x) \operatorname{sen}(x)} + 1}{\sqrt{|\operatorname{sen}(x)|} \operatorname{sen}(e^{\operatorname{arctang}(x)} - 1)}.$$

Esercizio 4. Utilizzando il Teorema di de l'Hopital calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{\log(x)}}{[\log(x)]^x}.$$

Esercizio 5. Risolvere la seguente equazione in campo complesso

$$\bar{w} - \frac{\left(\frac{1+i}{i-1}\right)^{12}}{1+w} = \left(\frac{i-1}{i+1}\right)^8.$$

Svolgimento

$$1. \begin{cases} x > 0 \\ 1 + \lg x \neq 0 \end{cases} \quad x \neq e^{-1}$$

$$ID =]0, e^{-1}[\cup]e^{-1}, +\infty[$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \left| \frac{1 - \lg x}{1 + \lg x} \right| = 0 \Leftrightarrow \lg x = 1 \Leftrightarrow x = e \quad (e, 0)$$

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow \left| \frac{1 - \lg x}{1 + \lg x} \right| > 0 \Leftrightarrow \forall x \in ID \quad x \neq e.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{\lg x = y, y \rightarrow -\infty} \arctg \left| \frac{1 - y}{1 + y} \right| = \arctg 1 = \frac{\pi}{4} \quad \text{As. vert. a } 0$$

$$\lim_{x \rightarrow e^{-1}} f(x) = \lim_{\lg x = y, y \rightarrow -1} \arctg \left| \frac{1 - y}{1 + y} \right| = \lim_{t \rightarrow +\infty} \arctg t = \frac{\pi}{2} \quad \text{As. vert. a } e^{-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{\lg x = y, y \rightarrow +\infty} \arctg \left| \frac{1 - y}{1 + y} \right| = \arctg 1 = \frac{\pi}{4} \quad y = \frac{\pi}{4} \text{ as. obliq. a } +\infty$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1 + \left(\frac{1 - \lg x}{1 + \lg x} \right)^2} \cdot \frac{\frac{1 - \lg x}{1 + \lg x}}{\left| \frac{1 - \lg x}{1 + \lg x} \right|} \cdot \frac{-\frac{1}{x} (1 + \lg x) - \frac{1}{x} (1 - \lg x)}{(1 + \lg x)^2} = \\ &= \frac{(1 + \lg x)^2}{2(1 + \lg^2 x)} \cdot \frac{1 - \lg x}{1 + \lg x} \cdot \frac{-\frac{2}{x}}{(1 + \lg x)^2} = -\frac{1}{x(1 + \lg^2 x)} \cdot \frac{1 - \lg x}{1 + \lg x} \end{aligned}$$

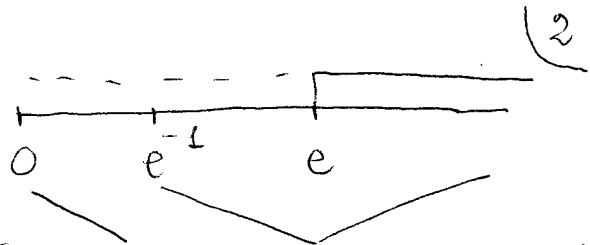
$$ID(f') = ID(f) - \{x \mid \lg x = 1\} = ID(f) - \{e\}.$$

$$\lim_{x \rightarrow e^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow e^-} -\frac{1}{x(1 + \lg^2 x)} = -\frac{1}{2e} \quad x = e \text{ pto angoloso}$$

$$\lim_{x \rightarrow e^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow e^+} \frac{1}{x(1 + \lg^2 x)} = \frac{1}{2e}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < e, x \neq e^{-1} \\ -\frac{1}{x(1 + \lg^2 x)} > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x > e \\ \frac{1}{x(1 + \lg^2 x)} > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < e \\ \emptyset \end{cases} \vee \begin{cases} x > e \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow x > e$$

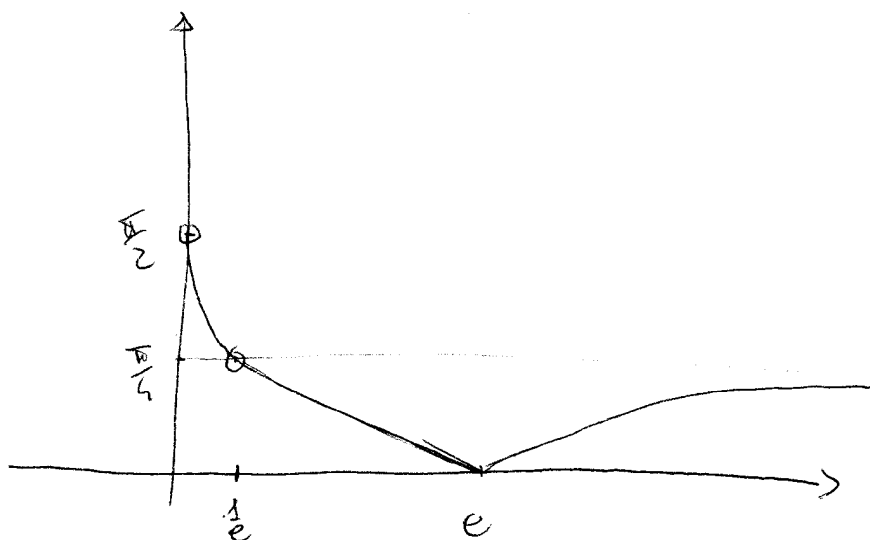


$\begin{cases} x = e \\ y = 0 \end{cases}$ pto di min. rel. (ed assoluto poichè $f(e) = 0 \leq f(x) \forall x$)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) =$$

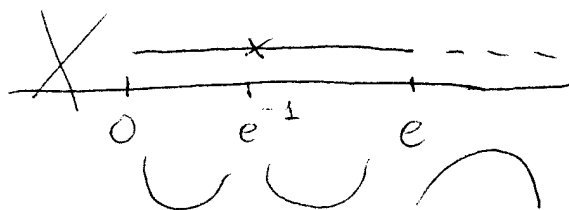
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{x(1+\ln^2 x)} = -\infty$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 0 $+\infty$ x gl'ordine



$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < e, x \neq e^{-1} \\ \frac{1+\ln^2 x + x \cdot \frac{2 \ln x}{x}}{x^2(1+\ln^2 x)^2} > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x > e \\ -\frac{1+\ln^2 x + x \cdot \frac{2 \ln x}{x}}{x^2(1+\ln^2 x)^2} > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 0 < x < e, x \neq e^{-1}$$



2. Poichè f è continua in $[0, 1[$ e

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{|1-x|^{3/2} |1+x|^{3/2}} = 0$$

$\downarrow$
 0 con ord $3/2$

f è integrabile
in $[0, 1[$.

Poichè f è continua in $]1, 2]$ e

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{|1-x|^{3/2} |1+x|^{3/2}} = +\infty$$

$\downarrow$
 0^+

con ord. grande
quindi $> \alpha > 1$

f non è integrabile in $]1, 2]$.

Poiché f è continua in $[2, +\infty)$ e

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x-1}} \rightarrow 1}{\underbrace{|1-x^2|^{3/2}}_{\downarrow \text{ con ord. } 3} \rightarrow +\infty} = 0 \quad \text{con ordine } 3 > 1$$

f è integrabile in $[2, +\infty[$.

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg \cos x - e^{\arctg x \cdot \sin x} + 1}{\sqrt{|\sin x|} \sin(e^{\arctg x} - 1)} = 0$$

poiché $\lg \cos x$ ha ordine 2 essendo $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg \cos x}{x^\alpha} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{\sin x}{\cos x}}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\tan x}{x^\alpha} = -\frac{1}{2}$
se $\alpha = 2$

$1 - e^{\arctg x \cdot \sin x}$ ha ordine 2 essendo $1 - e^{\arctg x \cdot \sin x} \sim -\arctg x \cdot \sin x \sim -x^2$

e quindi ordine del numeratore è 2 (poiché le parti p.w. e p.w. non sono opposte) mentre l'ordine del denominatore è $3/2$ poiché $\sqrt{|\sin x|} \sim \sqrt{|x|}$ e $\sin(e^{\arctg x} - 1) \sim \arctg x \sim x$.

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{\lg x}}{(\lg x)^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\lg^2 x}}{e^{x \lg |\lg x|}} = \frac{+\infty}{1} = +\infty$$

poiché $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{\lg x}}{(\lg x)^x} = 0$ per gli ordini 0 per P'Hopital essendo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg |\lg x|}{\frac{1}{x}} = \frac{+\infty}{+\infty} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \lg x}{-\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} -x \lg x = 0$$

$$5. \text{Poiché } \left(\frac{1+i}{i-1}\right)^{12} = \left[\frac{(1+i)^2}{i^2-1}\right]^{12} = \left(\frac{2i}{-2}\right)^{12} = (-i)^{12} = 1, \quad \left(\frac{i-1}{i+1}\right)^8 = i^8 = 1$$

l'equazione diventa $\bar{w} - \frac{1}{1+w} = 1 \Leftrightarrow \bar{w} + w \cdot \bar{w} = 1 = 1 + w$

$$\Leftrightarrow x - iy + x^2 + y^2 = 2 + x + iy \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \sqrt{2} \\ y = 0 \end{cases} \quad z = \pm \sqrt{2} \text{ sol.}$$