

COMPITO DI ISTITUZIONI DI MATEMATICHE I

C.d.L. Chimica

(23/06/2008)

Esercizio 1. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{1}{3}|x| + \log \left(2 \left(\frac{|x| - 1}{|x| - 2} \right) \right)$$

e disegnarne il grafico approssimativo.

Esercizio 2. Dire, giustificando le risposte, se la funzione

$$f(x) = \frac{\arctang(e^{-x})}{\log(e^x - 1)}$$

è integrabile negli intervalli $]0, 1]$, $[1, +\infty[$.

Esercizio 3. Senza utilizzare il Teorema di de l'Hopital calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\cos(x)} - e - \log(\arctang(x) \log(x + 1) + 1)}{\sqrt{|x|}(e^{\sin(x)} - 1)}.$$

Esercizio 4. Utilizzando il Teorema di de l'Hopital calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (\cos(x - 1) + \sin(x - 1))^{\frac{1}{\arctang^2(x-1)}}.$$

Esercizio 5. Risolvere la seguente equazione in campo complesso

$$\left(\bar{w} + \frac{i + 1}{i - 1} \right)^3 = \left(\frac{i + 1}{i - 1} \right)^{10}.$$

Svolgimento

$$1. \begin{cases} |x| > 0 & x \neq 0 \\ \lg^2|x| - 5\lg|x| + 6 \neq 0 \end{cases} \quad \lg|x| = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \lg|x| \neq 2 & x \neq \pm e^2 \\ \lg|x| \neq 3 & x \neq \pm e^3 \end{matrix}$$

$$ID = \mathbb{R} - \{\pm e^2, \pm e^3, 0\}.$$

Perché f è pari, basta studiarla per $x > 0$, e quindi si può togliere il valore assoluto.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\lg^2 x - 5\lg x + 6} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

As. Verticale $x = 0$
 f si può prolungare per continuità per $x \rightarrow 0$.

$$\lim_{x \rightarrow (e^2)^-} \frac{1}{\lg^2 x - 5\lg x + 6} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$x = e^2 \quad x = e^3 \quad \text{A.s. Vert.}$$

$$\lim_{x \rightarrow (e^3)^+} \frac{1}{\lg^2 x - 5\lg x + 6} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Per decidere il segno di ∞ , basta studiare la parità di f .

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow \lg^2 x - 5\lg x + 6 > 0 \Leftrightarrow \lg x < 2 \vee \lg x > 3$$

$$\Leftrightarrow 0 < x < e^2 \vee x > e^3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lg^2 x - 5\lg x + 6} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

per gli ordini

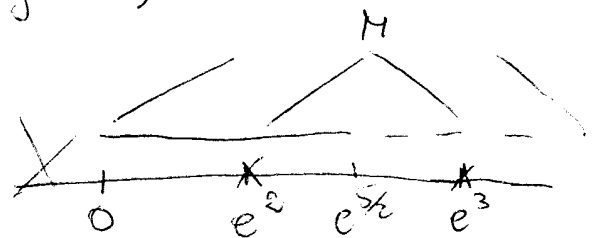
$$0 \quad + \quad e^2 \quad - \quad e^3 \quad +$$

$$y = 0 \quad \text{A.s. Orizzontale}$$

$$y' = - \frac{\frac{2\lg x}{x} - \frac{5}{x}}{[\lg^2 x - 5\lg x + 6]^2} = \frac{5 - 2\lg x}{x(\lg^2 x - 5\lg x + 6)^2}$$

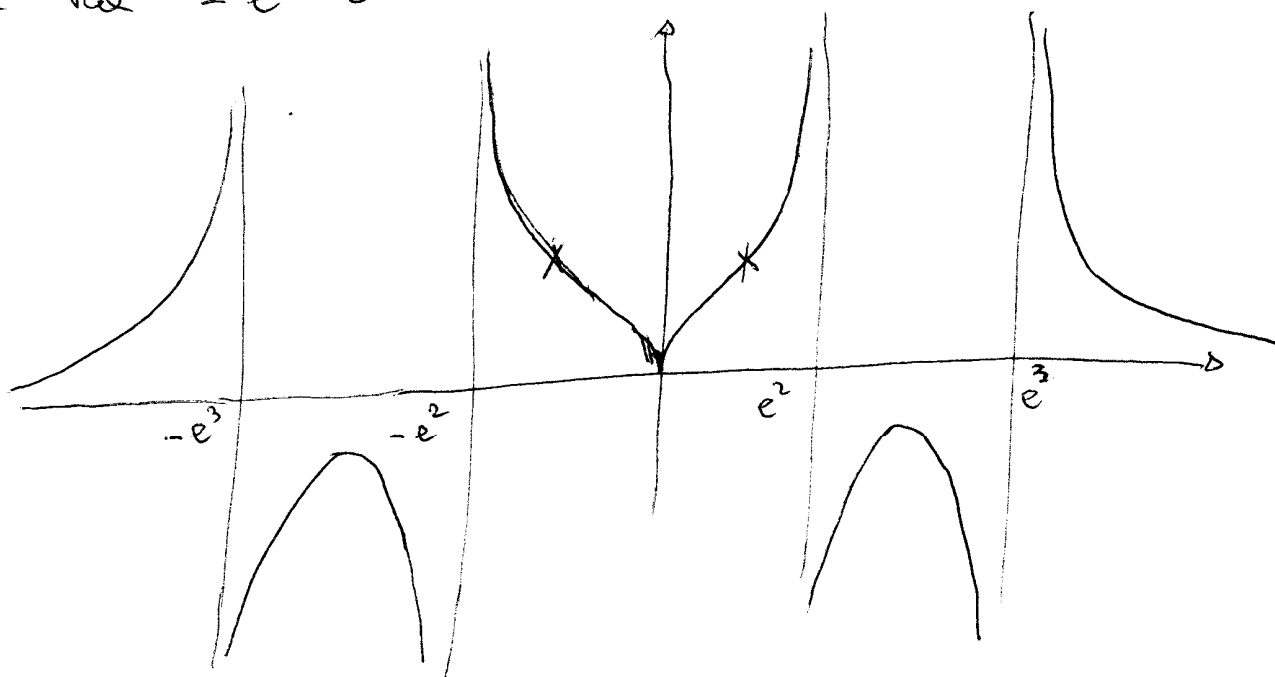
$$y' > 0 \Leftrightarrow \lg x < \frac{5}{2} \quad 0 < x < e^{5/2}$$

$$M \begin{cases} x = e^{5/2} \\ y = \frac{1}{(\frac{5}{2})^2 - 5 \cdot \frac{5}{2} + 6} = -4 \end{cases}$$



Poiché $\lim_{x \rightarrow 0^+} y' = e^{\frac{5-2\lg x}{x(\lg^2 x - 5\lg x + 6)^2}} = \frac{+\infty}{0^+} = +\infty$ (2)
 per gli ordini
 $\downarrow$ $\downarrow$
 0^+ $+\infty$

senza studiare il segno di y'' si capisce che f ha un passo di ascese compreso tra 0 e e^2 e, per simmetria, un altro di ascese tra $-e^2$ e 0 .



2. Poiché $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\lg(e^x - 1)}{\arctg(e^{-x})} = \frac{-\infty}{+\infty} = -\infty$ con ordine comunque lento

essendo $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\lg(e^x - 1)}{\frac{1}{x^\alpha}} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{e^x - 1} \frac{x^{\alpha+1}}{-\alpha} = -\frac{1}{\alpha} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x \cdot x}{e^x - 1} = 0$
 $\forall \alpha > 0$

segue che f è integrabile in senso improprio in $]0, 1]$.

Poiché $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lg(e^x - 1)}{\arctg(e^{-x})} = \frac{+\infty}{0} = +\infty$ con ordine 1

essendo $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lg(e^x - 1)}{x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x - 1} = 1 \neq 0$

segue che f non è integrabile in $[1, +\infty)$.

3. Poiché per $x \rightarrow 0$ sfruttando i limiti notevoli

$$e^{\cos x} - e = +e(e^{\cos x - 1} - 1) \sim e(\cos x - 1) \sim e\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

$$\lg(\arctg x \lg(x+1) + 1) \sim \arctg x \lg(x+1) \sim x \cdot x = x^2$$

$$\sqrt{|x|}(e^{\sin x} - 1) \cong |x|^{\frac{1}{2}} \sin x \sim |x|^{\frac{1}{2}} \cdot x$$

il limite vale 0 perché il numeratore è infinitesimo di ordine 2 e il denominatore di ordine $\frac{3}{2}$.

$$4. \lim_{x \rightarrow 1^+} (\cos(x-1) + \sin(x-1))^{\frac{1}{\arctg^2(x-1)}} = 1^{+\infty}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\frac{1}{\arctg^2(x-1)} \lg[\cos(x-1) + \sin(x-1)]} = +\infty$$

perché $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\lg[\cos(x-1) + \sin(x-1)]}{\arctg^2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\lg(\cos x + \sin x)}{x^2} =$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x + \sin x} \left(\frac{-\sin x + \cos x}{2x} \right) = +\infty.$$

5. Poiché $\frac{i+1}{i-1} = \frac{(i+1)^2}{i^2-1} = \frac{2i}{-2} = -i$ e $(-i)^{10} = i^{10} = 1$

e' eq. dwente $\bar{\omega} = i = \sqrt[3]{1} = \left\{ \cos \frac{0+2k\pi}{3} + i \sin \frac{0+2k\pi}{3}, k=0,1,2 \right\}$

$$\Rightarrow \bar{\omega}_0 = i + \cos 0 + i \sin 0 = 1+i \Rightarrow \omega_0 = 1-i$$

$$\bar{\omega}_1 = i + \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = i - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow \omega_1 = -\frac{1}{2} - (1 + \frac{\sqrt{3}}{2})i$$

$$\bar{\omega}_2 = i + \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = i - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow \omega_2 = -\frac{1}{2} + (\frac{\sqrt{3}}{2} - 1)i.$$