

COMPITO DI ISTITUZIONI DI MATEMATICHE I

C.d.L. Chimica

(20/02/2008)

Esercizio 1. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{e^x - x^2}{|x + 1|}$$

e disegnarne il grafico approssimativo.

Esercizio 2. Dire, giustificando le risposte, se la funzione

$$f(x) = \frac{\log(x)}{\arctang(e^x - \cos(x))}$$

è integrabile negli intervalli $]0, 1]$, $[1, +\infty[$.

Esercizio 3. Senza utilizzare il Teorema di de l'Hopital calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctang(\log(x + 1)) - \log(\cos(x))}{\sin(\sqrt{x + 1} - 1)}.$$

Esercizio 4. Utilizzando il Teorema di de l'Hopital calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\log(x + 1) - \arctang(e^x - 1))}{\sin(\arctang(x)) + e^{\cos(x) - 1} - 1}.$$

Esercizio 5. Determinare il dominio ed il codominio della funzione

$$f(x) = \frac{1 + \arctang(|x|)}{1 - \arctang(|x|)}.$$

Esercizio 6. Risolvere la seguente equazione in campo complesso

$$w - \frac{i}{1 + w} = -3i.$$

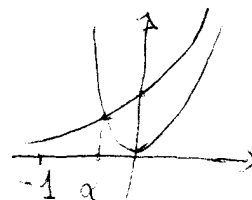
NOTA BENE: coloro che fanno il secondo esonero devono risolvere gli esercizi 1, 2, 3.

Svolgimento

$$1. ID = \mathbb{R} - \{-1\}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=0 \\ e^x = x^2 \\ x = \alpha < 0 \end{cases}$$



$$f(x) > 0 \Leftrightarrow e^x > x^2 \Leftrightarrow x > \alpha$$

N.B. $-1 < \alpha$ perché se $x = -1: \frac{1}{e} < 1$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{e^x - x^2}{|x+1|} = \frac{\frac{1}{e} - 1}{0^+} = -\infty$$

$x = -1$ As. verticale

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - x^2}{|x+1|} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - x^2}{x+1} = +\infty$$

per gli ordini $\nearrow$ As. orizz. $a + \infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - x^2}{x(x+1)} = +\infty$$

per gli ordini $\nearrow$ As. oblique $a + \infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - x^2}{-x-1} = -\infty$$

per gli ordini $\nearrow$ as. oblique $a - \infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - x^2}{x(-x-1)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2}{-x^2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - mx = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - x^2}{-x-1} - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - x^2 + x^2 + x}{-x-1} = -1$$

$$y = x - 1 \quad \text{As. obl. } a - \infty$$

$$y' = \frac{(e^x - 2x)|x+1| - (e^x - x^2) \frac{|x+1|}{x+1}}{(x+1)^2} = \frac{|x+1|}{(x+1)^3} [(e^x - 2x)(x+1) - (e^x - x^2)]$$

$$ID(y') = ID(y)$$

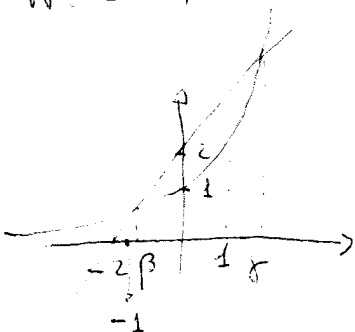
$$y' > 0 \Leftrightarrow \frac{x e^x - x^2 - 2x}{x+1} > 0$$

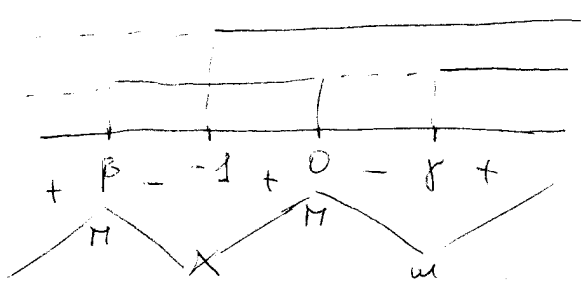
$$N > 0 \Leftrightarrow x e^x > x^2 + 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ e^x > x + 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ e^x < x + 2 \end{cases}$$

$$\exists \beta < 0 < \gamma \text{ s.t. } x > \gamma \vee \beta < x < 0$$

N.B. $-2 < \beta < -1$ perché se $x = -1: \frac{1}{e} < 1$ vero
 $\gamma > 1$ perché se $x = 1: e > 3$ falso

$$D > 0 \quad x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$$



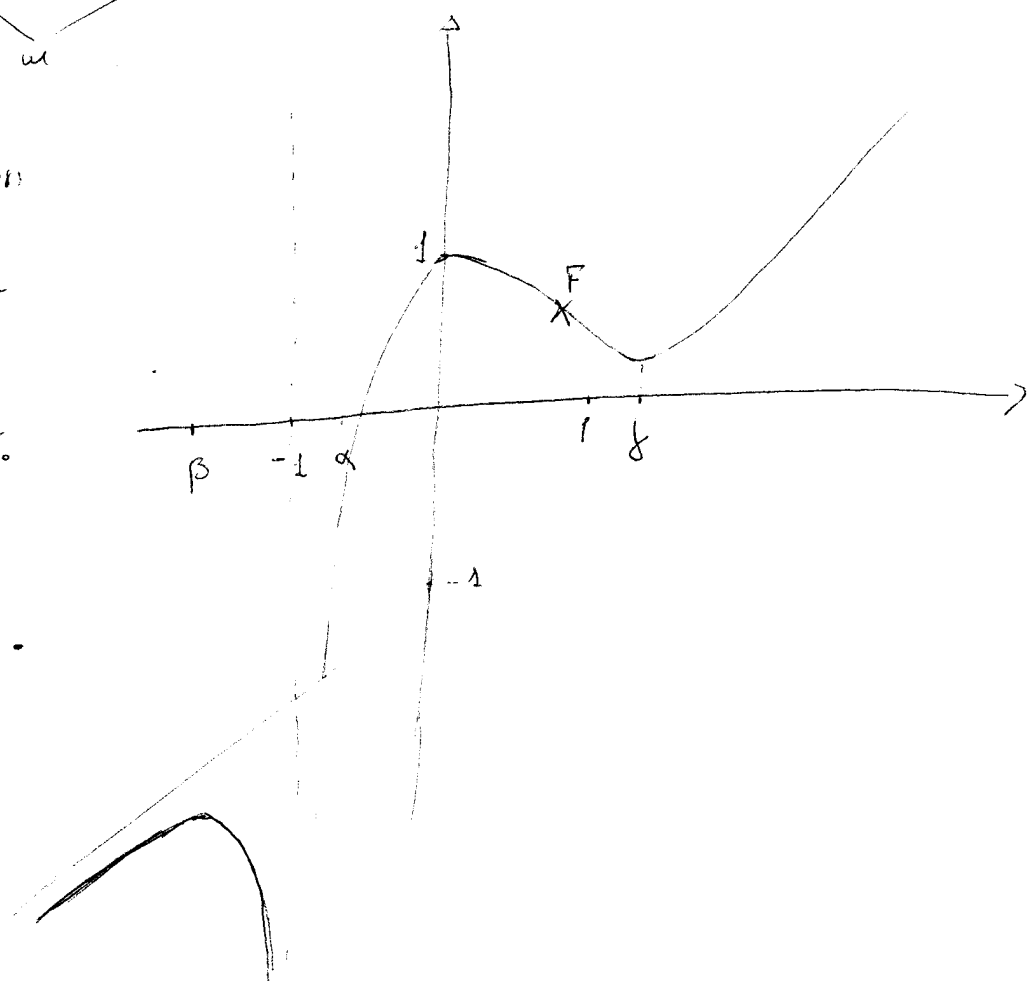


$$M \begin{cases} x = \beta \\ y = f(\beta) \end{cases}$$

$$m \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$M \begin{cases} x = \gamma \\ y = f(\gamma) \end{cases}$$

Senza studiare f''
si capisce che c'è un
flessa alla origine
compresa tra 0 e γ .



2. f non è integrabile in $]0,1]$ perché $\lim_{x \rightarrow 0} f = -\infty$

con ordine > 1 essendo il numeratore infinito (comunque piccolo) e il denominatore infinitesimo di ordine 1
essendo per $x \rightarrow 0^+$: $\arctg(e^x - \cos x) \sim e^x - \cos x = \underbrace{e^x - 1}_{\text{ord } 1} + \underbrace{1 - \cos x}_{\text{ord } 2} \sim e^x - 1$.

f non è integrabile in $[1, +\infty)$ perché

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lg x}{\arctg(e^x - \cos x)} = \frac{+\infty}{\frac{\pi}{2}} = +\infty.$$

3. Perché $\arctg(\lg(x+1)) \sim \lg(x+1) \sim x$ se $x \rightarrow 0$

(per i logaritmi) $\lg(\cos x) = \lg(\cos x - 1 + 1) \sim \cos x - 1 \sim -\frac{x^2}{2}$

$$\text{sen}(\sqrt{x+1} - 1) \sim \sqrt{x+1} - 1 = \frac{x}{\sqrt{x+1} + 1} \sim \frac{x}{2}$$

segue che il limite dato vale

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg(x+1) + \frac{x^2}{2}}{\frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\frac{x}{2}} = 2$$

3

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\lg(x+1)) - \operatorname{arctg}(e^x - 1)}{\sin(\operatorname{arctg} x) + e^{\cos x - 1} - 1} = \frac{0}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\lg(x+1)) \frac{1}{x+1} - \frac{1}{1+(e^x-1)^2} e^x}{\frac{\cos(\operatorname{arctg} x)}{x^2+1} + e^{\cos x - 1} \cdot (-\sin x)} = \frac{0-1}{1+0} = -1$$

5. $ID = \{x \in \mathbb{R} \mid \operatorname{arctg}|x| \neq 1\} = \mathbb{R} - \left\{\pm \frac{\pi}{4}\right\}$.

$$|x| \neq \frac{\pi}{4}$$

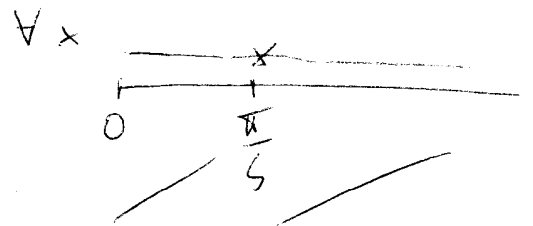
$$x \neq \pm \frac{\pi}{4}$$

Poiché f è pari, basta studiare il codominio di $f|_{[0, +\infty) - \{\frac{\pi}{4}\}}$

Per $x > 0$ $f'(x) = D \frac{1 + \operatorname{arctg} x}{1 - \operatorname{arctg} x} = \frac{\frac{1}{1+x^2}(1 - \operatorname{arctg} x) + \frac{1}{1+x^2}(1 + \operatorname{arctg} x)}{(1 - \operatorname{arctg} x)^2}$

si ha

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2}{(1+x^2)(1 - \operatorname{arctg} x)^2} \geq 0 \quad \forall x$$



$$f(0) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1 + \frac{\pi}{2}}{1 - \frac{\pi}{2}} < 0$$

Segue che il codominio di f è $\left[\frac{1+\frac{\pi}{2}}{1-\frac{\pi}{2}}, +\infty\right)$.

6. $w^2 + w - i = -3iw - 3i$ $w^2 + (1+3i)w + 2i = 0$

$$w_{\pm} = \frac{-1-3i \pm \sqrt{(1+3i)^2 - 8i}}{2} = \frac{-1-3i \pm \sqrt{-8-2i}}{2}$$

dove

$$\sqrt{-8-2i} = \sqrt{68} \left(\cos \frac{\bar{\theta}}{2} + i \sin \frac{\bar{\theta}}{2} \right) = \pm \sqrt{68} \left(\cos \frac{\bar{\theta}}{2} + i \sin \frac{\bar{\theta}}{2} \right)$$

$$\begin{cases} \cos \frac{\bar{\theta}}{2} = \frac{4}{\sqrt{17}} \\ \sin \frac{\bar{\theta}}{2} = -\frac{1}{\sqrt{17}} \end{cases}$$