COMPITO DI ISTITUZIONI DI MATEMATICHE I
C.d.L. Chimica
(04/02/2008)

Esercizio 1. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{4x(|x|-2)}{|x-2|(x+2)^2}$$

e disegnarne il grafico approssimativo.

Esercizio 2. Dire, giustificando le risposte, se la funzione

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\log(x)}$$

è integrabile negli intervalli $]0, \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}, 1[$, $[2, +\infty[$.

Esercizio 3. Senza utilizzare il Teorema di de l'Hopital calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(e^x - 1) - e^{\cos(x)-1} + 1}{\sqrt{\operatorname{tang}(x) + 1} - 1}.$$

Esercizio 4. Utilizzando il Teorema di de l'Hopital calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctang}(e^x - \log(\log(x+1)+1) - 1)}{\operatorname{arctang}(\operatorname{sen}(x)) - 1 + \cos(\operatorname{arcsen}(x))}.$$

Esercizio 5. Determinare il dominio ed il codominio della funzione

$$f(x) = \frac{1 + |\log(x)|}{1 - |\log(x)|}.$$

Esercizio 6. Risolvere la seguente equazione in campo complesso

$$|w|^2 w^2 = \left(\frac{i+1}{i-1}\right)^4.$$

NOTA BENE: coloro che fanno il secondo esonero devono risolvere gli esercizi 1, 2, 3.

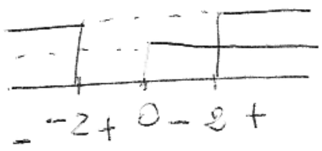
Svolgimento

$$ID(f) = \mathbb{R} - \{\pm 2\} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ x(|x|-2) = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0 \vee |x| = 2$$

$$(0,0) \quad (\pm 2, 0)$$

$$f(x) > 0 \iff x(|x|-2) > 0 \iff \quad x > 0$$

$$|x| > 2 \quad x < -2 \vee x > 2$$



$$f(x) > 0 \iff x \in \,]-2, 0[\, \cup \,]2, +\infty)$$

Si osservi che

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{4x(-x-2)}{(-x+2)(x+2)^2} = \dfrac{4x}{x^2-4} & \text{se } x < 0,\ x \neq -2 \\[2ex] \dfrac{4x(x-2)}{(-x+2)(x+2)^2} = -\dfrac{4x}{(x+2)^2} & 0 \leq x < 2 \\[2ex] \dfrac{4x\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x+2)^2} = \dfrac{4x}{(x+2)^2} & x > 2 \end{cases}$$

Asintoti orizzontali

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{4x}{(x+2)^2} = 0 \qquad y = 0 \text{ As. orizz. destro}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{4x}{x^2-4} = 0 \qquad \text{" " sinistro}$$

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} \frac{4x}{x^2-4} = -\frac{8}{0^+} = -\infty \qquad x = 2 \text{ As. vert. completo}$$

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} \frac{4x}{x^2-4} = -\frac{8}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +2^-} f(x) = \lim_{x \to +2^-} -\frac{4x}{(x+2)^2} = -\frac{8}{16} = -\frac{1}{2}$$

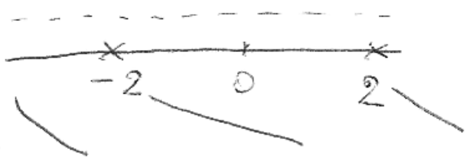
$$\lim_{x \to +2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \frac{4x}{(x+2)^2} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

$$y' = \begin{cases} 4\,\dfrac{x^2-4-2x^2}{(x^2-4)^2} = -4\,\dfrac{x^2+4}{(x^2-4)^2} & x<0 \quad x \neq -2 \\[2ex] -4\,\dfrac{(x+2)^2-2(x+2)x}{(x+2)^4} = 4\,\dfrac{x^2-4}{(x+2)^4} & 0<x<2 \\[2ex] 4\,\dfrac{(x+2)^2-2(x+2)x}{(x+2)^4} = -4\,\dfrac{x^2-4}{(x+2)^4} & x>2 \end{cases}$$

Poiché f è continua in $x=0$ e $\lim_{x\to 0^-} y' = -1 = \lim_{x \to 0^+} y'$, segue che f è derivabile in $x=0$ con $f'(0) = -1$.
Invece f non è derivabile in $x=2$, anche se $\lim_{x\to 2^-} y' = 0 = \lim_{x\to 2^+} y'$ perché non è continua in $x=2$

$$y'>0 \iff \begin{cases} x<0 \quad x\neq -2 \\ -4\,\dfrac{x^2+4}{(x^2-2)^2} > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 0<x<2 \\ 4\,\dfrac{x^2-4}{(x+2)^4} > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x>2 \\ -4\,\dfrac{x^2-4}{(x+2)^4} > 0 \end{cases}$$

$$\emptyset \qquad\qquad \emptyset \qquad\qquad \emptyset$$

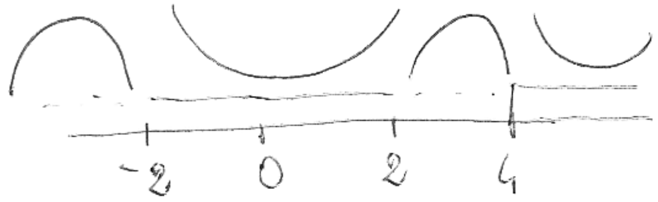


f decresce in $(-\infty,-2[$, in $]-2,2[$ e in $]2,+\infty)$.

$$y'' = \begin{cases} -4\,\dfrac{2x(x^2-4)^2-2(x^2-4)2x(x^2+4)}{(x^2-4)^4} = \dfrac{8x(x^2-4)(x^2+12)}{(x^2-4)^4} & x<0 \\ & x\neq -2 \\[2ex] 4\,\dfrac{2(x+2)^4x-(x^2-4)4(x+2)^3}{(x+2)^8} = 8\,\dfrac{-x^2+2x+8}{(x+2)^5} = 8\,\dfrac{4-x}{(x+2)^4} & 0<x<2 \\[2ex] 8\,\dfrac{x-4}{(x+2)^4} & x>2 \end{cases}$$

$$y''>0 \iff \begin{cases} x<0 \quad x\neq -2 \\ x(x^2-4)>0 \end{cases} \vee \begin{cases} 0<x<2 \\ 4-x>0 \end{cases} \vee \begin{cases} x>2 \\ x-4>0 \end{cases}$$

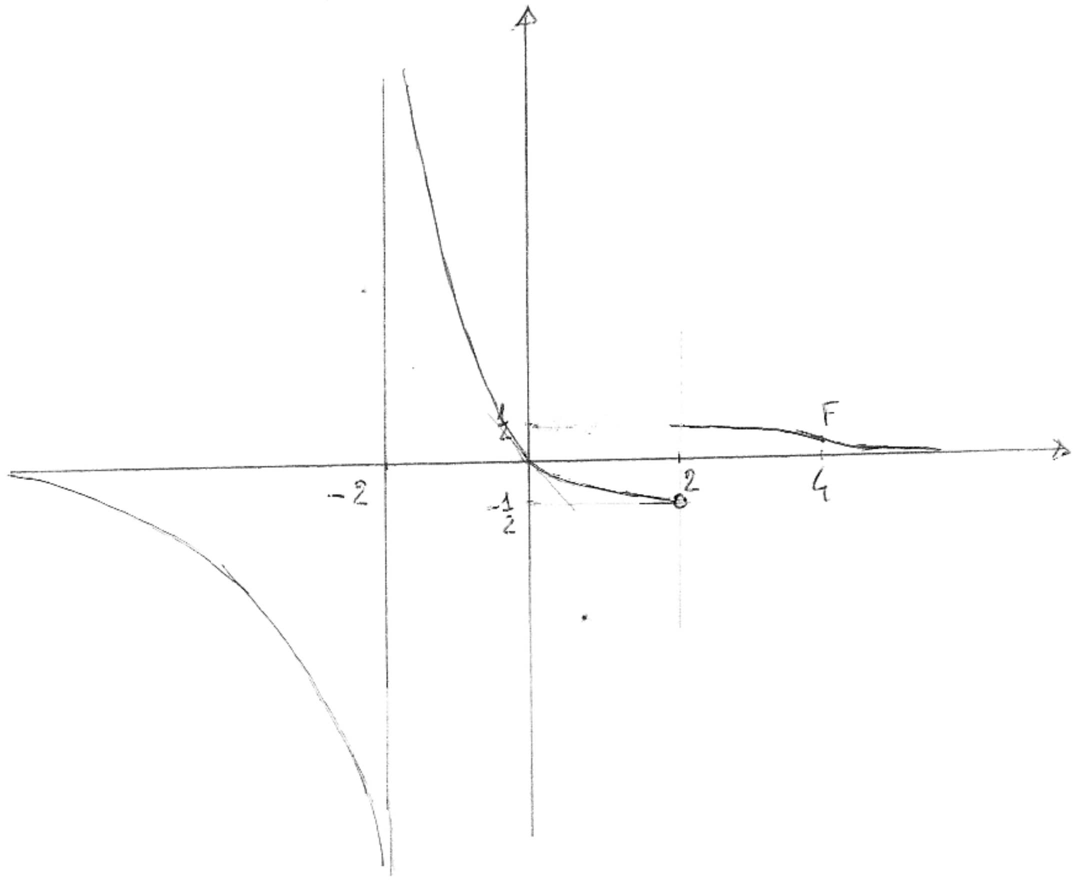
$$y''>0 \iff -2<x<0 \quad \vee \quad 0<x<2 \quad \vee \quad x>4$$



f convessa in $]-2, 2[$ e in $]4, +\infty)$

concava in $]-\infty, -2[$ e in $]2, 4[$

$x = 4$ pto di flesso



2. Poiché f è continua in $]0, \frac{1}{2}[$ e $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{0\cdot\frac{\pi}{2}}{-\infty} = 0$ segue che f è integrabile in senso classico in $]0, \frac{1}{2}]$.

Poiché f è continua in $[\frac{1}{2}, 1[$ e $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \frac{e^{-1}\operatorname{arctg} 1}{0^-} = -\infty$ con ordine 1 essendo $\lg x$ infinitesimo di ordine 1 per $x\to 1$ ($\lim_{x\to 1}\frac{\lg x}{x-1} = 1$) segue che f non è integrabile in $[\frac{1}{2}, 1[$.

Poiché f è continua in $[2, +\infty)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{e^0\cdot 0}{+\infty} = 0$ con ordine > 2 $\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2}}{\lg x} \Big/ \frac{1}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{1}{\lg x}}_{+\infty}\cdot\underbrace{\frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}}_{1} = 0\right)$

segue che f è integrabile in $[2, +\infty)$.

3. Poiché $\operatorname{sen}(e^x-1) \sim e^x - 1 \sim x \quad$ se $x \to 0$

$$e^{\cos x - 1} - 1 \sim \cos x - 1 \sim -\frac{x^2}{2}$$

$$\sqrt{\operatorname{tg} x + 1} - 1 = (\operatorname{tg} x + 1)^{\frac{1}{2}} - 1 \sim \frac{1}{2}\operatorname{tg} x \sim \frac{1}{2} x$$

il limite diventa $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x + \cancel{\frac{x^2}{2}}}{\frac{1}{2}x} = 2$

4. $$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg}(e^x - \lg(\lg(x+1)+1) - 1)}{\operatorname{arctg}(\operatorname{sen} x) - 1 + \cos(\operatorname{arcsen} x)} =$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+[e^x - \lg(\lg(x+1)+1)-1]^2}\left(e^x - \frac{1}{\lg(x+1)+1}\cdot\frac{1}{x+1}\right)}{\frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 x}\cos x - \operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = \frac{1\cdot(1-1)}{1-0} = 0$$

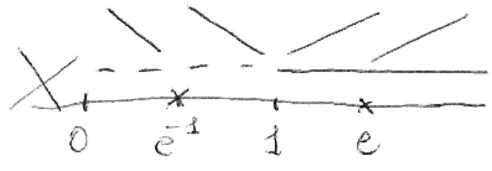
5. ID: $\begin{cases} x > 0 \\ |\lg x| \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \lg x \neq \pm 1 \Rightarrow x \neq e, \frac{1}{e}$

ID $=]0, e^{-1}[\cup]e^{-1}, e[\cup]e, +\infty)$.

$$y' = \frac{\frac{1}{x}\frac{\lg x}{|\lg x|}(1 - \cancel{|\lg x|}) + (1 + \cancel{|\lg x|})\frac{1}{x}\frac{\lg x}{|\lg x|}}{(1-|\lg x|)^2} = \frac{\frac{2}{x}\frac{\lg x}{|\lg x|}}{(1-|\lg x|)^2}$$

$\forall x \in ID$: $\lg x \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$

$y' > 0 \iff \lg x > 0 \Rightarrow x > 1$, $x \neq e$



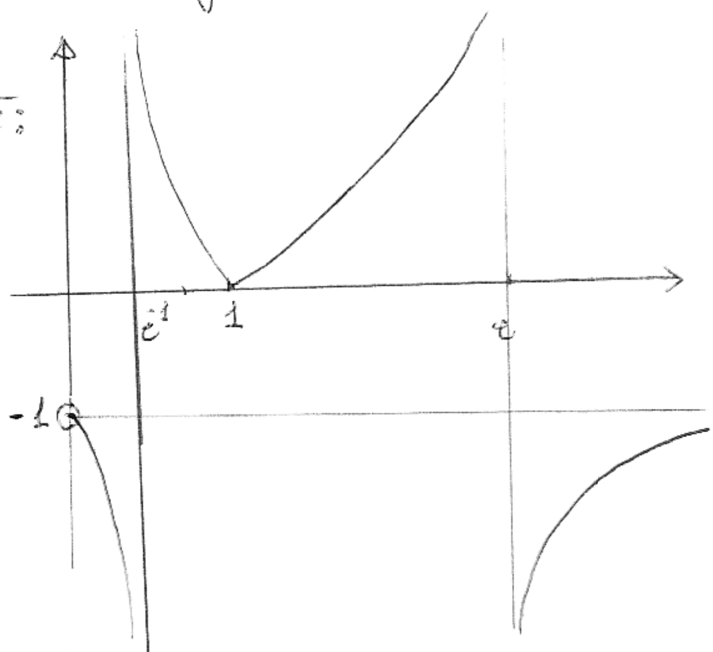
$$\lim_{x\to 0^+} y \underset{|\lg x| = t}{=} \lim_{t\to+\infty} \frac{1+t}{1-t} = -1$$

$\displaystyle\lim_{x\to(e^{-1})^-} y = \frac{2}{0^-} = -\infty \qquad \lim_{x\to(e^{-1})^+} y = \frac{2}{0^+} = +\infty \qquad x = e^{-1}$ A.V.

$\displaystyle\lim_{x\to e^-} y = \frac{2}{0^+} = +\infty \qquad \lim_{x\to e^+} y = \frac{2}{0^-} = -\infty \qquad x = e$ A.V.

$$\lim_{x\to+\infty} y \underset{|\lg x| = t}{=} \lim_{t\to+\infty} \frac{1+t}{1-t} = -1 \qquad y=-1 \text{ A. asint. destro}$$

Poichè il grafico approssimativo è:



segue che il codominio di f è

$(-\infty, -1[\cup [0, +\infty)$.

6. $$\left(\frac{i+1}{i-1}\right)^4 = \left[\frac{(i+1)(i+1)}{i^2-1}\right]^4 = \left(\frac{\cancel{i^2}+\cancel{1}+2i}{-2}\right)^4 = (-i)^4 = 1$$

Posto $z = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ deve risultare

$$\rho^4(\cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta) = 1 \Rightarrow \begin{cases}\rho^4 \cos 2\theta = 1\\ \rho^4 \operatorname{sen} 2\theta = 0\end{cases} \Rightarrow$$

$\operatorname{sen} 2\theta = 0 \Rightarrow 2\theta = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Sostituendo nella 1ª eq. deve essere $\begin{cases}\cos 2\theta = 1\\ \rho = 1\end{cases}$ e quindi

$\cancel{2}\theta = \cancel{2}k\pi \Rightarrow \theta = 0 \vee \theta = \pi$

Dunque le 2 sol. sono $z = \pm 1$.