

**COMPITO DI ISTITUZIONI DI MATEMATICHE I**  
**C.d.L. Chimica**  
**(12/12/2007)**

Esercizio 1. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x^2}{|x+1|} - 4$$

e disegnarne il grafico approssimativo.

Esercizio 2. Dire, giustificando le risposte, se la funzione

$$f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x^2}} - 1}{\log(x)}$$

è integrabile negli intervalli  $]0, 1]$ ,  $[1, +\infty[$ .

Esercizio 3. Utilizzando il Teorema di de l'Hopital calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan\left(1 - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)}{2^{\tan\left(\frac{1}{x}\right)} - 1}.$$

Esercizio 4. Confrontando gli infinitesimi calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan(x)} - \sqrt{1 - 2\sin(x)}}{\log(x+1)}.$$

Esercizio 5. Risolvere la seguente equazione in campo complesso

$$w - \frac{1}{1 + \overline{w}} = 1.$$

# Svolgimento

$$1. f(x) = \frac{x^2}{|x+1|} - 4$$

$$|x+1| \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$$

$$ID = \mathbb{R} - \{-1\}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y = -4 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ x^2 = 4|x+1| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x^2 = 4x+4 \end{cases} \vee \begin{cases} x < -1 \\ x^2 = -4x-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \pm 2\sqrt{2} \\ x = -2 \end{cases}$$

$(2 \pm 2\sqrt{2}, 0)$   $(-2, 0)$  intersezione con asse x

$$y > 0 \Leftrightarrow x^2 > 4|x+1| \Rightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x^2 > 4x+4 \end{cases} \vee \begin{cases} x < -1 \\ x^2 > -4x-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2-2\sqrt{2} \vee x > 2+\sqrt{2} \\ (x+2)^2 > 0 \text{ con } x \neq -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x < -1 \text{ con } x \neq -2 \vee -1 < x < -2-2\sqrt{2} \vee x > 2+2\sqrt{2}$$

## Asintoti

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2}{|x+1|} - 4 = +\infty \quad x = -1 \text{ A.V.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{|x+1|} - 4 = +\infty \quad (\text{x ord. 1.}) \nexists \text{ A.O.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} - \frac{4}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) =$$

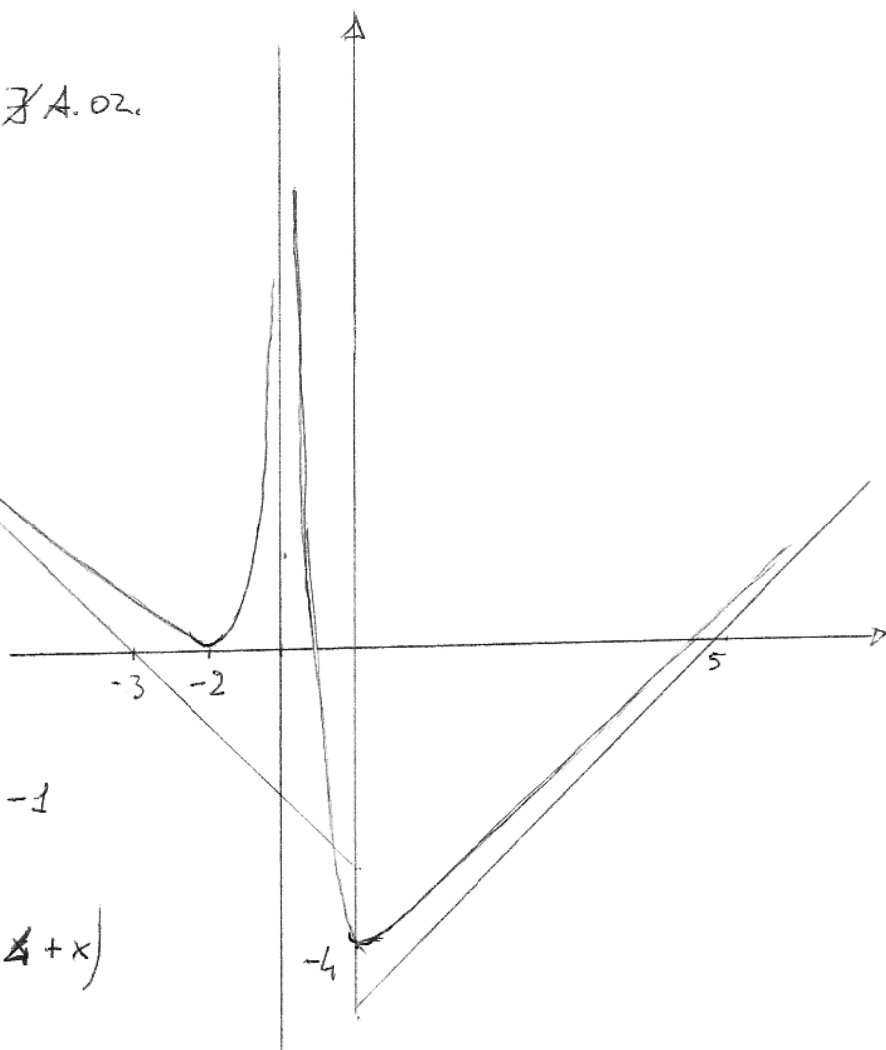
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2}{x+1} - x \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5x-4}{x+1} = -5$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-x-1} - \frac{4}{x} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x^2}{-x-1} + x \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+4}{-x-1} = -3$$



$y = x - 5$  as. obl. a destra

$y = -x - 3$  as. obl. a sinistra

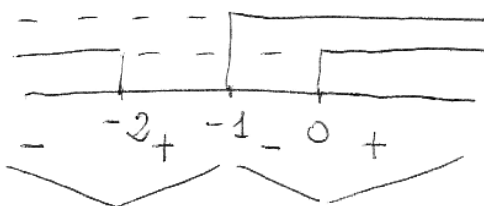
$$y' = \frac{2x|x+1| - x^2 \frac{x+1}{|x+1|}}{(x+1)^2} = \frac{2x(x+1)^2 - x^2(x+1)}{(x+1)^2|x+1|} = \frac{2x(x+1) - x^2}{(x+1)|x+1|}$$

$$\text{ID } y' = \text{ID } y = \mathbb{R} - \{-1\}$$

$$y' > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x}{x+1} > 0$$

$$N > 0 \quad x < -2 \vee x > 0$$

$$D > 0 \quad x > -1$$



$(-2, 0)$  pt di

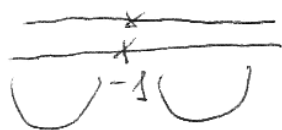
$(0, -4)$  min

$$y'' = D \frac{x^2 + 2x}{(x+1)|x+1|} = \frac{(2x+2)(x+1)|x+1| - (x^2+2x)[|x+1| + (x+1)\frac{x+1}{|x+1|}]}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{2(x+1)^2|x+1| - (x^2+2x)[2|x+1|]}{(x+1)^4} = \frac{2|x+1|[(x+1)^2 - (x^2+2x)]}{(x+1)^4}$$

$$y'' > 0 \Leftrightarrow \cancel{x^3} + 2\cancel{x} + 1 - \cancel{x^3} - \cancel{2x} > 0 \quad \forall x \in \text{ID}$$

$f$  è convessa in  $(-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty)$ .



$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x^2}} - 1}{\lg x} = \frac{+\infty}{-\infty} = +\infty$$

con ordine grande e quindi  $\geq 1$

(perché l'esponenziale è un infinito di ordine comunque grande e prevale sull'infinito comunque piccolo di  $\lg x$ .)

$\Rightarrow$  la funzione non è integrabile in  $[0, 1]$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x^2}} - 1}{\lg x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x^2}} - 1}{\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{1}{x^2 \lg x} = 1 \cdot 0 = 0 \quad \text{con ordine } > 2 > 1$$

$\Rightarrow$  la funzione è integrabile in  $[1, +\infty)$

$$\text{N.B. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x^2}} - 1}{\frac{1}{x^2}} = e^y \frac{e^y - 1}{y} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \lg x = +\infty \quad \text{con ord } > 2$$

$x$  proprietà ordine.

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{arctg}(1 - \cos \frac{1}{x})}{2^{\lg \frac{1}{x}} - 1} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{1 + (1 - \cos \frac{1}{x})^2} \cdot \sin \frac{1}{x} \cdot (-\frac{1}{x^2})}{2^{\lg \frac{1}{x}} \lg 2 \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{x}} \cdot (-\frac{1}{x^2})} = 0$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\lg x} - \sqrt{1 - 2 \operatorname{sen} x}}{\lg(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\lg x} - 1 - ((1 - 2 \operatorname{sen} x)^{\frac{1}{2}} - 1)}{\lg(1+x)} = 0$$

perché  
per  $x \rightarrow 0$ :

$$e^{\lg x} - 1 \sim \lg x \sim x$$

essendo  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\lg x} - 1}{\lg x} = 1$

$$(1 - 2 \operatorname{sen} x)^{\frac{1}{2}} - 1 \sim -\frac{1}{2} \cdot 2 \operatorname{sen} x \sim -x$$

essendo  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - 2 \operatorname{sen} x)^{\frac{1}{2}} - 1}{-2 \operatorname{sen} x} = \frac{1}{2}$

$$\lg(1+x) \sim x$$

Dunque il limite di partenza di Sena

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+x}{x} = 2$$

$$5. \omega - \frac{1}{1+\bar{\omega}} = 1 \Rightarrow \omega + \omega \bar{\omega} - 1 = 1 \quad \text{con } \bar{\omega} \neq -1$$

Potro  $\omega = x + iy$  :  $x + iy + x^2 + y^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x - 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{matrix} -2 \\ 1 \end{matrix} \\ y &= 0 \end{aligned}$$

$\Re \omega = -2$ ,  $\Im \omega = 1$  soluzioni (accettabili perché soddisfanno la condizione  $\bar{\omega} \neq -1$ ).