COMPITO DI ISTITUZIONI DI MATEMATICHE I
C.d.L. Chimica
(02/10/2007)

Esercizio 1. Studiare la funzione

$$f(x) = \left| \operatorname{arctang}(|x|) - \left| \frac{x^3}{3} + x \right| \right|$$

e disegnarne il grafico approssimativo.

Esercizio 2. Dire, giustificando le risposte, se la funzione

$$f(x) = \frac{\log(x)}{e^{x-1} - 1}$$

è integrabile negli intervalli $]0, \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}, 1[\,]1, +\infty[$.

Esercizio 3. Utilizzando il Teorema di de l'Hopital calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(\operatorname{sen}(x) + 1) - \log(\cos(x))}{\operatorname{sen}^2(\operatorname{arctang}(x)) - \cos^2(\operatorname{arctang}(x)) + 1}.$$

Esercizio 4. Confrontando gli infinitesimi calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(\cos(x)) - \operatorname{arctang}(e^x - 1)}{\log(\operatorname{sen}(x) + 1)\sqrt{|x|}}.$$

Esercizio 5. Risolvere la seguente equazione in campo complesso

$$\left(\bar{w} + \frac{i-1}{1+i} \right)^5 = i^5.$$

Svolgimento

1. ID = $\mathbb{R}$ Per semplicità studio $g(x)=\operatorname{arctg}|x|-|x|\left(\frac{x^2}{3}+1\right)$ e poi ne prendo il valore assoluto. Poiché g (e f) è pari, lo studio solo per $x \geq 0$ e poi ne ribalto il grafico rispetto all'asse y. Dunque studio

$$g(x)=\operatorname{arctg} x - x\left(\frac{x^2}{3}+1\right) \quad \text{per } x\geq 0$$

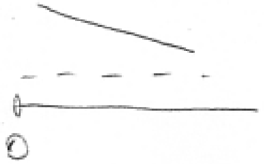
$$g(0)=0 \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x)=-\infty \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=-\infty$$

$\nexists$ asintoti orizzontali né obliqui né verticali.

$$g'(x)=\frac{1}{1+x^2}-x^2-1 \quad \forall x>0$$

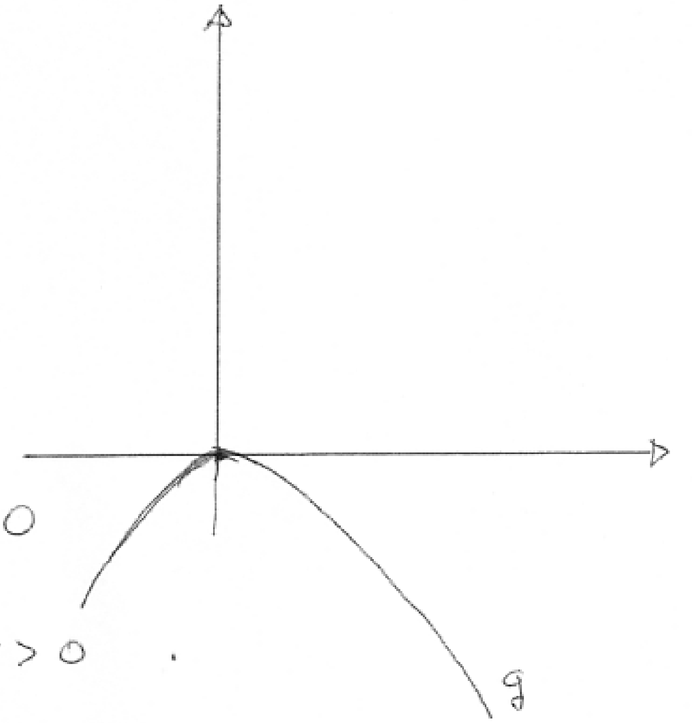
$$g'(x)>0 \iff 1-(x^2+1)^2>0$$

$$\iff -1<x^2+1<1 \text{ mai}$$

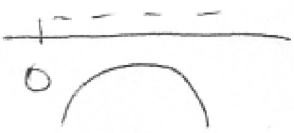


g str. decr. $\forall x \geq 0$

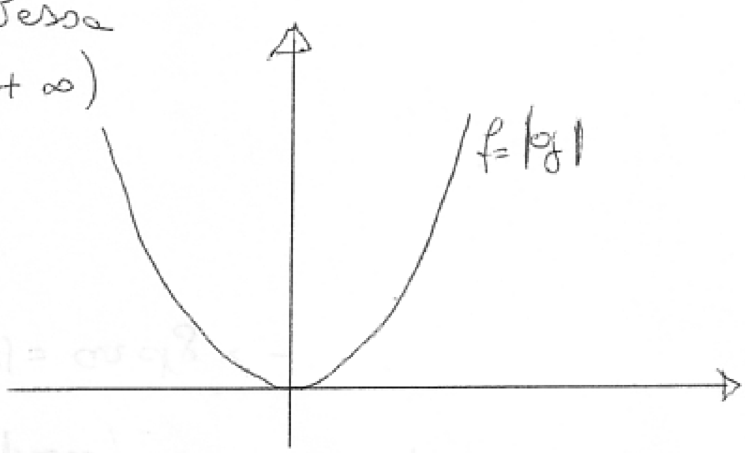
$$g'_+(0)=\lim_{x\to 0^+} g'(x)=0$$



$$g''(x)=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}-2x<0 \quad \forall x>0$$



g str. convessa in $]0,+\infty)$



Poiché $g'_+(0)=0$ e g è pari $\Rightarrow g'_-(0)=0$ cioè g è deriv. in 0 con $g'(0)=0$.

Passando a $f=|g|$ segue che anche f è derivabile in 0 e $f'(0)=0$

2. f è continua in $]0,1[\cup]1,+\infty)$ e

$$\lim_{x\to 0}\frac{\lg x}{e^{x-1}-1}=-\infty$$ con ord. comunque lento quindi $<\alpha<1$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\lg x}{e^{x-1}-1}\underset{x-1=y}{=}\lim_{y\to 0}\frac{\lg(1+y)}{e^{y}-1}=\lim_{y\to 0}\frac{\lg(1+y)}{y}\cdot\frac{y}{e^{y}-1}=1$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\lg x}{e^{x-1}-1}=0$$ con ordine comunque grande (perché rapporto di un infinito lento e di uno comunque grande) quindi $>\alpha>1$

Dunque f è integ. in s. i. in $]0,\frac{1}{2}]$ per criterio ordine di infinito; f è integrabile nel senso classico in $[\frac{1}{2},1[$ perché prolungabile per continuità in $x=1$; f è integrabile in s. i. in $]1,+\infty)$ per criterio ordine di infinitesimo.

3. $$\lim_{x\to 0}\frac{\lg(\operatorname{sen}x+1)-\lg(\cos x)}{\operatorname{sen}^2(\operatorname{arctg}x)-\cos^2(\operatorname{arctg}x)+1}=\frac{0}{0}\overset{H}{=}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x+1}-\frac{-\operatorname{sen}x}{\cos x}}{\frac{2\operatorname{sen}(\operatorname{arctg}x)\cos(\operatorname{arctg}x)}{1+x^2}+\frac{2\cos(\operatorname{arctg}x)\operatorname{sen}(\operatorname{arctg}x)}{1+x^2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x+1}+\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}}{4\underbrace{\operatorname{sen}(\operatorname{arctg}x)}_{\downarrow\ 0}\underbrace{\cos(\operatorname{arctg}x)}_{\downarrow\ 1}}=\frac{1}{0}.$$

Poichè $\operatorname{sen}(\operatorname{arctg} x) > 0$ ~~se~~ $\operatorname{arctg} x > 0 \iff x > 0$

il limite dato $\nexists$ essendo il limite destro $= +\infty$ e

il limite sinistro $= -\infty$

4. Poichè

$$\lim_{x\to 0} \frac{\lg(\cos x)}{x^\alpha} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{\alpha\, x^{\alpha-1}} = -\frac{1}{2} \quad \text{se } \alpha - 1 = 1 \text{ cioè } \alpha = 2$$

$\operatorname{ord}(\lg(\cos x)) = 2$; inoltre si ha

$\operatorname{ord}(\operatorname{arctg}(e^x - 1)) = 1$ essendo $\operatorname{arctg}(e^x-1) \sim e^x - 1 \sim x$;

$\operatorname{ord}(\lg(\operatorname{sen} x + 1)) = 1$ essendo $\lg(\operatorname{sen} x + 1) \sim \operatorname{sen} x \sim x$;

$\operatorname{ord} \sqrt{|x|} = \frac{1}{2}$.

Segue che $\operatorname{ord}(\text{numeratore}) = 1$, $\operatorname{ord}(\text{denomin}) = \frac{3}{2}$

quindi il limite diventa $\lim_{x\to 0} \frac{-\cancel{x}}{\cancel{x}\sqrt{|x|}} = -\infty$.

5. Poichè $\frac{i-1}{1+i} = \frac{(i-1)^2}{i^2-1} = \frac{-2i}{-2} = i$ l'eq. diventa

$$\overline{\omega} + i = \sqrt[5]{i} = \left\{ \cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{5} + i \operatorname{sen} \frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{5} \;\middle|\; k = 0, 1, 2, 3, 4 \right\}.$$

Per $k = 0$: $\overline{\omega} + i = \cos\frac{\pi}{10} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{10} \Rightarrow \omega_0 = \cos\frac{\pi}{10} + i\left(1 - \operatorname{sen}\frac{\pi}{10}\right)$

Per $k = 1$: $\overline{\omega} + i = \cos\frac{\pi}{2} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} \Rightarrow \omega_1 = 0$

Per $k = 2$: $\overline{\omega} + i = \cos\frac{9}{10}\pi + i\operatorname{sen}\frac{9}{10}\pi \Rightarrow \omega_2 = \cos\frac{9}{10}\pi + i\left(1 - \operatorname{sen}\frac{9}{10}\pi\right)$

Per $k = 3$: $\overline{\omega} + i = \cos\frac{13}{10}\pi + i\operatorname{sen}\frac{13}{10}\pi \Rightarrow \omega_3 = \cos\frac{13}{10}\pi + i\left(1 - \operatorname{sen}\frac{13}{10}\pi\right)$

Per $k = 4$: $\overline{\omega} + i = \cos\frac{17}{10}\pi + i\operatorname{sen}\frac{17}{10}\pi \Rightarrow \omega_4 = \cos\frac{17}{10}\pi + i\left(1 - \operatorname{sen}\frac{17}{10}\pi\right)$.