

COMPITO DI ISTITUZIONI DI MATEMATICHE I
C.d.L. Chimica
(14/09/2007)

Esercizio 1. Studiare la funzione

$$f(x) = \log(x^2 + 1) + |x^2 + x|$$

e disegnarne il grafico approssimativo.

Esercizio 2. Dire, giustificando le risposte, se la funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt[4]{|1 - x^3|^3}}{e^{x-1} - 1}$$

è integrabile negli intervalli $[0, 1[$, $]1, +\infty[$.

Esercizio 3. Utilizzando il Teorema di de l'Hopital calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\cos(x) - 1) - \arctan^2(\sin(x))}{\cos^2(e^x - 1) - e^{\sin(x)}}.$$

Esercizio 4. Confrontando gli infinitesimi calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\cos(x)} - e - \cos(\arctan(x) \sin(x))}{\log(\sin(x) + 1) \sqrt{|x|}}.$$

Esercizio 5. Risolvere la seguente equazione in campo complesso

$$(w + \overline{i - 1})^4 = \left(\frac{i - 1}{1 + i}\right)^4.$$

1. $ID = \mathbb{R}$ $f(-x) \neq -f(x)$ f non è né pari né dispari

$y \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ perché somma di quantità positive

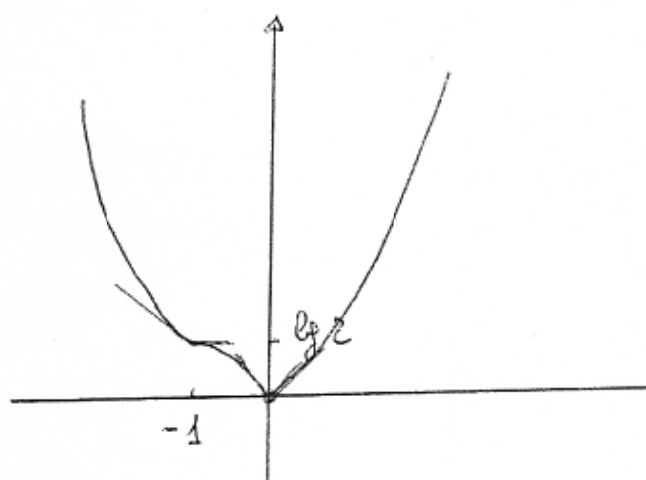
$y = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ per gli ordini

3 as. ord. obbligati

$y' = \frac{2x}{x^2+1} + \frac{x^2+x}{|x^2+x|} \cdot (2x+1) \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0, -1\}$



$y' = \begin{cases} \frac{2x}{x^2+1} + 2x+1 & \text{se } x < -1 \vee x > 0 \\ \frac{2x}{x^2+1} - 2x-1 & \text{se } -1 < x < 0 \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow -1^-} y' = \frac{-2}{2} - 2 + 1 = -2$
 $\lim_{x \rightarrow -1^+} y' = \frac{-2}{2} + 2 - 1 = 0$
 $\Rightarrow -2 = f'_-(-1) \neq f'_+(-1) = 0$
 $(-1, \lg 2)$ pto angolare

$\lim_{x \rightarrow 0^-} y' = -1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} y' = 1 \Rightarrow -1 = f'_-(0) \neq f'_+(0) = 1$
 $(0, 0)$ pto angolare

$y' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \vee x > 0 \\ \frac{2x + 2x^3 + 2x + x^2 + 1}{x^2 + 1} > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} -1 < x < 0 \\ \frac{2x - 2x^3 - 2x - x^2 - 1}{x^2 + 1} > 0 \end{cases}$

Studio la disuguaglianza

I) $2x^3 + x^2 + 4x + 1 > 0 \Leftrightarrow 2x^3 > -x^2 - 4x - 1$

con il metodo grafico.

$$f_1(x) = 2x^3$$

$$f_2(x) = -x^2 - 4x - 1$$

parabola di vertice $(-2, 3)$

intersezioni con asse x : $(-2 \pm \sqrt{3}, 0)$

graficamente si nota che

$\exists \alpha \in]-1, 0[$: $f_2(x) > f_1(x)$ per $x > \alpha$

Per di più interessa studiare I) per $x < -1 \vee x > 0$ segue che il primo sistema è verificato per $x > 0$.

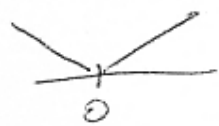
Studio sempre graficamente la disuguaglianza

$$\text{II) } -2x^3 - x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow 2x^3 + x^2 + 1 < 0 \Leftrightarrow (x+1)(2x^2 - 2x + 1) < 0$$

$$\Leftrightarrow x < -1$$

Per di più serve studiare II) per $-1 < x < 0$ segue che il 2° sistema non è mai soddisfatto.

Dunque $y' > 0 \Leftrightarrow x > 0$

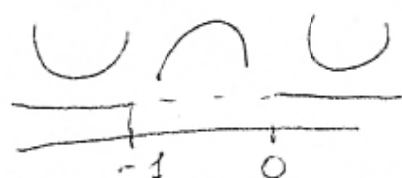


$(0,0)$ minimo
rel. e assoluto

$$y'' = \begin{cases} 2 \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} + 2 & x < -1 \vee x > 0 \\ 2 \frac{1-x^2}{(1+x^2)} - 2 & -1 < x < 0 \end{cases}$$

$$y'' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \vee x > 0 \\ 1-x^2 + (1+x^2)^2 > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} -1 < x < 0 \\ 1-x^2 - (1+x^2)^2 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \vee x > 0 \\ x^4 + x^2 + 2 > 0 \\ x < -1 \vee x > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} -1 < x < 0 \\ x^4 + 3x^2 < 0 \\ \emptyset \end{cases}$$



f concava in $(-\infty, -1[$ e $]0, +\infty)$

f convessa in $] -1, 0[$.

2. Poiché f è continua in $[0,1[$ e

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt[4]{|1-x|^3}}{e^{x-1}-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(1-x)^{3/4} (1+x+x^2)}{e^{x-1}-1} \stackrel{y=1-x}{=} 3 \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y^{3/4}}{e^{-y}-1}$$

$$= 3 \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y^{3/4}}{e^{-y}-1} \cdot (-e^y) = -\infty \quad \text{con ordine } \frac{1}{4} < 1$$

f è integrabile in $[0,1[$.

Poiché f è continua in $]1, +\infty)$ e $\lim_{x \rightarrow 1^+} f = +\infty$ con ord. $\frac{1}{4} < 1$

mentre $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ con ordine comunque grande e quindi $\exists x > 1$ (perché il numeratore è un infinito di ordine $\frac{3}{4}$ mentre il denominatore è infinito di ordine comunque grande), segue che f è integrabile in $]1, +\infty)$.

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\cos x - 1) - \arctg^2(\sin x)}{\cos^2(e^x - 1) - e^{\sin x}} = \frac{0}{0} \stackrel{H}{=}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\cos x - 1) \cdot (-\sin x) - 2 \arctg(\sin x) \cdot \frac{1}{1 + \sin^2 x} \cdot \cos x}{2 \cos(e^x - 1) \cdot (-\sin(e^x - 1)) \cdot e^x - e^{\sin x} \cdot \cos x}$$

$$= \frac{\cos 0 \cdot \sin 0 - \frac{2 \arctg 0}{1 + 0} \cdot \cos 0}{-2 \cos 0 \cdot \sin 0 \cdot e^0 - e^0 \cos 0} = \frac{0}{-1} = 0.$$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e(e^{\cos x - 1} - 1) - \cos(\arctg x) \cdot \sin x}{\lg(\sin x + 1) \sqrt{|x|}} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{-\cos(\arctg x)}_{+1} \cdot \underbrace{\frac{\sin x}{\lg(\sin x + 1)}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{|x|}}}_{+\infty} = -\infty$$

* Posso trascurare il termine $e^{\cos x - 1} - 1$ perché è
infinitesimo di ordine 2 mentre $\cos(\arcsin x) \sin x$ ha
ordine 1. Infatti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\cos x - 1} - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{e^{\cos x - 1} - 1}{\cos x - 1}}_1 \cdot \underbrace{\frac{\cos x - 1}{x^2}}_{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}.$$

5. Poiché $\overline{i-1} = -1-i$ e $\frac{i-1}{1+i} = \frac{(i-1)(1-i)}{1-i^2} = \frac{-(1-i)^2}{2} = i$

l'eq. diventa $w + 1 - i = \sqrt[4]{i}$.

Essendo $\sqrt[4]{i} = \sqrt[4]{\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}} = \left\{ \cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{4} \right\}_{k=0,1,2,3}$
 $= \left\{ \pm \left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right), \pm \left(\cos \frac{5\pi}{8} + i \sin \frac{5\pi}{8} \right) \right\}$
 $\quad \quad \quad \underbrace{\quad}_{-\cos \frac{\pi}{8}} \quad \quad \underbrace{\quad}_{\sin \frac{\pi}{8}}$

l'equazione diventa

$$w_{\frac{1}{2}} = 1+i \pm \left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right)$$

$$w_{\frac{3}{4}} = 1+i \mp \cos \frac{\pi}{8} \pm i \sin \frac{\pi}{8}$$