COMPITO DI ISTITUZIONI DI MATEMATICHE I
C.d.L. Chimica
(03/09/2007)

Esercizio 1. Studiare la funzione

$$f(x) = \operatorname{arctang}(|x|) - \left|\frac{x^3}{3} + x\right|$$

e disegnarne il grafico approssimativo.

Esercizio 2. Dire, giustificando le risposte, se la funzione

$$f(x) = \frac{\log(x)}{\sqrt[4]{|1 - x^3|^3}}$$

è integrabile negli intervalli $]0, \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}, 1[$, $]1, 2]$, $[2, +\infty[$.

Esercizio 3. Utilizzando il Teorema di de l'Hopital calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\operatorname{sen}(x)) - \log^2(\cos(x)) - 1}{\operatorname{sen}^2(\operatorname{arctang}(x)) - \operatorname{arctang}(\cos(x) - 1) + x}.$$

Esercizio 4. Confrontando gli infinitesimi calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos(x)) - \operatorname{arctang}(e^x - 1)}{\cos(\sqrt[4]{|x|}) - 1}.$$

Esercizio 5. Risolvere la seguente equazione in campo complesso

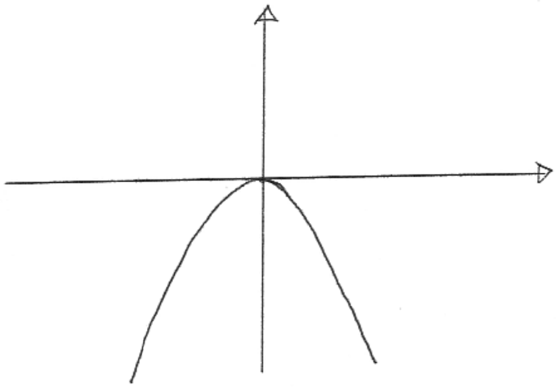
$$\left(w + \frac{i-1}{1+i}\right)^5 = i^5.$$

Svolgimento

1. $ID = \mathbb{R}$ Poiché f è pari, studio f per $x \geq 0$; $f(0) = 0$

$$\lim_{x \to +\infty} f = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{arctg} x - \frac{x^3}{3} - x}{x} = -\infty$$

$\nexists$ asintoti orizz. né obliqui $\nexists$ as. vert. essendo f continua su $\mathbb{R}$.



$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - x^2 - 1 = \frac{1-(x^2+1)^2}{1+x^2} = \frac{-x^4-2x^2}{1+x^2}$$

$f' < 0 \quad \forall x > 0$

$$f''(x) = D\left(\frac{1}{x^2+1} - x^2 - 1\right) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2} - 2x =$$

$$= -2x\left(\frac{1}{(x^2+1)^2} + 1\right) \qquad f'' < 0 \quad \forall x > 0$$

$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = 0$ Poiché f è pari, $f'(0) = 0$

2. f è definita e continua in $]0,1[\cup]1,+\infty)$.

Poiché $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ con ordine comunque lento, f è integr. in senso improprio in $]0, \frac{1}{2}]$.

Poiché $\lim_{x \to 1^\pm} f(x) = \lim_{x \to 1^\pm} \frac{\lg x}{|1-x|^{3/4}(1+x+x^2)^{3/4}} = \pm\infty$

con ordine $< \frac{3}{4} < 1$ $\left(\text{essendo } \lim_{x \to 1^\pm} \frac{\lg x \, |x-1|^{\cancel{3}}}{\cancel{|1-x|^{3/4}}(1+x+x^2)^{3/4}} = \pm\infty\right)$

f è integrabile in s.i. in $[\frac{1}{2}, 1[$ e in $]1, 2]$.

Poiché $\lim_{x \to +\infty} \frac{\lg x}{\sqrt[4]{|1-x^3|^3}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\lg x}{x^{9/4}} = 0$ con ordine $> \frac{9}{4} - \varepsilon > 1$ con $\varepsilon > 0$

$\left(\text{essendo } \lim_{x \to +\infty} \frac{\lg x}{\sqrt[4]{x^9}} \cdot x^{9/4 - \varepsilon} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\lg x}{x^{\varepsilon}} = 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \text{ piccolo}\right)$

f è integr. in s.i. in $[2, +\infty)$.

3. $$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\operatorname{sen} x) - \lg^2(\cos x) - 1}{\operatorname{sen}^2(\operatorname{arctg} x) - \operatorname{arctg}(\cos x - 1) + x} \overset{H}{=}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)\cdot \cos x - 2\lg(\cos x)\cdot \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x}}{2\operatorname{sen}(\operatorname{arctg} x)\cdot\frac{1}{1+x^2} - \frac{-\operatorname{sen} x}{1+(\cos x - 1)^2} + 1} = \frac{0}{1} = 0$$

4. Poiché

$\lim_{x\to 0} \lg(\cos x) = 0$ con ord. 2 essendo $\lim_{x\to 0} \frac{\lg(\cos x)}{x^\alpha} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = -\frac{1}{2}$

se $\alpha = 2$

e $\lim_{x\to 0} \operatorname{arctg}(e^x - 1) = 0$ con ord. 1 essendo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg}(e^x-1)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg}(e^x-1)}{e^x-1} \cdot \frac{e^x-1}{x} = 1$$ per limiti notevoli

$\lim_{x\to 0} (\cos \sqrt[4]{|x|} - 1) = 0$ con ord $\frac{1}{2}$ essendo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos\sqrt[4]{|x|} - 1}{\left(\sqrt[4]{|x|}\right)^2} = \lim_{\substack{t\to 0 \\ t=\sqrt[4]{|x|}}} \frac{\cos t - 1}{t^2} = -\frac{1}{2}$$

segue che il limite vale 0 essendo rapporto tra un infinitesimo di ordine 1 e un infinitesimo di ord. $\frac{1}{2}$ -

5. Poiché $\frac{i-1}{i+1} = \frac{(i-1)^2}{i^2-1} = \frac{i^2+1-2i}{-2} = i$, basta risolvere l'equazione

$$w + i = \sqrt[5]{i^5} \iff w + i = \sqrt[5]{i} \iff w = \sqrt[5]{\cos\frac{\pi}{2} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}} - i$$ con

$$\sqrt[5]{\cos\frac{\pi}{2} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{5} + i\operatorname{sen}\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{5} \quad k = 0, 1, \dots, 4$$ -

Dunque $w_0 = \cos\frac{\pi}{10} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{10} - i$, $w_1 = \cos\frac{\pi}{2} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} - i = 0$,

$w_2 = \cos\frac{9}{10}\pi + i\operatorname{sen}\frac{9}{10}\pi - i$, $w_3 = \cos\frac{13}{10}\pi + i\operatorname{sen}\frac{13}{10}\pi - i$

$w_4 = \cos\frac{17}{10}\pi + i\operatorname{sen}\frac{17}{10}\pi - i$ sono le 5 radici dell'equaz.