

COMPITO DI ISTITUZIONI DI MATEMATICHE I
C.d.L. Chimica
(18/07/2007)

Esercizio 1. Studiare la funzione

$$f(x) = \arctang(|x|) - \frac{|x|^3}{3} - |x|$$

e disegnarne il grafico approssimativo.

Esercizio 2. Dire, giustificando le risposte, se la funzione

$$f(x) = \frac{\log(|x - 1|)}{\sqrt[4]{|1 - x^3|^3}}$$

è integrabile negli intervalli $[0, 1[$, $]1, +\infty[$.

Esercizio 3. Utilizzando il Teorema di de l'Hopital calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\sin(x) + 1) - \log(\cos(x))}{\sin^2(\arctang(x)) - \cos^2(\arctang(x)) + 1}.$$

Esercizio 4. Confrontando gli infinitesimi calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctang(\cos(x) - 1) - \cos(x^{\frac{3}{2}}) + 1}{\sin(e^x - 1)}.$$

Esercizio 5. Risolvere la seguente equazione in campo complesso

$$\left(w + \frac{i - 1}{1 + i}\right)^3 = \left(\frac{i - 1}{1 + i}\right)^{11}.$$

1. $ID = \mathbb{R}$ f è pari, quindi studio f per $x \geq 0$ e poi
 faccio simmetria rispetto asse y
 $f(0) = 0$ Non studio il segno di f (servirebbe metodo
 grafico)

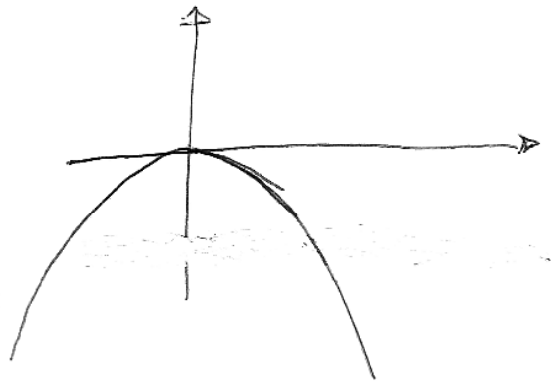
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f = -\infty \quad \text{As. obl.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan x - \frac{1}{3}x}{x} = -\infty \quad \text{per ordine As. obl.}$$

$$y' = \frac{1}{1+x^2} - x^3 - 1 \quad \forall x > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y' = 1 - 1 = 0$$

$$y' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} - 2x = -2x \left(\frac{1}{(1+x^2)^2} + 1 \right)$$



$y' > 0$ mai se $x > 0 \Rightarrow$ decrescente $\forall x > 0$

$$y'' = -2 \left[\frac{1}{(1+x^2)^3} + 1 \right] - 2x \cdot \frac{-2(1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^4} = 2 \left[-\frac{1}{(1+x^2)^3} + 1 + \frac{4x^2}{(1+x^2)^3} \right]$$

$$= 2 \frac{-1 - x^2 - (1+x^2)^3 + 4x^2}{(1+x^2)^3} = 2 \frac{-1 + 3x^2 - 1 - x^6 - 3x^2 - 3x^4}{(1+x^2)^3}$$

$$y'' > 0 \Leftrightarrow -x^6 - 3x^4 > 0 \quad \text{mai } 0$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 1^\pm} \frac{\lg |x-1|}{\sqrt[4]{|1-x|^3}} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{(1+x+x^2)^3}} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty \quad \text{con ordine}$$

$$= \text{ord}(\lg |x-1|) + \text{ord}(|1-x|^{3/4}) \geq \frac{3}{4} \quad \text{ma} < 1$$

comunque
più piccolo $\frac{3}{4}$

$\Rightarrow f$ è integrabile in $[0, 1[$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lg |x-1|}{|1-x^3|^{3/4}} = \frac{+\infty}{+\infty} = 0 \quad \text{con ordine} < \frac{9}{4} \quad \text{ma} > \frac{9}{4} - \varepsilon > 1$$

con $\varepsilon > 0$ piccolo a piacere $\Rightarrow f$ è integrabile
 in $]1, +\infty)$ perché fissato $a > 1$ b è in $]1, a]$ e in $[a, +\infty)$.

$$3. \lim_{x \rightarrow 0^{\pm}} \frac{\lg(\sin x + 1) - \lg(\cos x)}{\sin^2(\arctg x) - \cos^2(\arctg x) + 1} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^{\pm}} \frac{\lg(\sin x + 1) - \lg(\cos x)}{2 \sin^2(\arctg x)} \stackrel{H}{=}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^{\pm}} \frac{\frac{\cos x}{\sin x + 1} + \frac{\sin x}{\cos x}}{4 \underbrace{\sin(\arctg x)}_0 \underbrace{\cos(\arctg x)}_1 \underbrace{\frac{1}{1+x^2}}_1} = \frac{1+0}{0^{\pm}} = \pm \infty$$

$\Rightarrow$ il limite non esiste perché $\lim_{x \rightarrow 0^{\pm}} = \pm \infty$

essendo $\sin(\arctg x) > 0 \Leftrightarrow 0 < \arctg x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow x > 0$

$$4. \left. \begin{aligned} \arctg(\cos x - 1) &\sim \cos x - 1 \sim -\frac{x^2}{2} \\ 1 - \cos x^{\frac{3}{2}} &\sim \frac{x^3}{2} \end{aligned} \right\} \text{ord (Numeratore)} = 2$$

$$\sin(e^x - 1) \cong e^x - 1 \sim x \Rightarrow \text{ord (Denominatore)} = 1$$

Confrontando gli ordini segue che il limite vale 0.

$$5. \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{1-i^2} = \frac{1+i^2-2i}{2} = -i, \quad (-i)^{11} = -i^{11} = -(i^2)^5 \cdot i = i$$

$$w - i = \sqrt[3]{i} = \sqrt[3]{\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}} = \left\{ \cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} \right\}$$

$$= \left\{ \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}, \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}, \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right\}$$

$$= \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, -i \right\}.$$