COMPITO DI ISTITUZIONI DI MATEMATICHE I
C.d.L. Chimica
(25/06/2007)

Esercizio 1. Studiare la funzione

$$f(x) = \log(|x|+1) + x^2 - |x|$$

e disegnarne il grafico approssimativo.

Esercizio 2. Dire, giustificando le risposte, se la funzione

$$f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{\sqrt[4]{|1-x^3|^3}}$$

è integrabile negli intervalli $[0,1[$, $]1,2]$, $[2,+\infty[$.

Esercizio 3. Utilizzando il Teorema di de l'Hopital calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctang}(e^x) - \operatorname{arctang}(e^{-x})}{e^{\operatorname{arctang}(x)} - e^{\operatorname{arctang}(-x)}}.$$

Esercizio 4. Confrontando gli infinitesimi calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(e^{x^2}-1) - \cos(x^3) + 1}{\operatorname{arctang}(\log(x+1))}.$$

Esercizio 5. Risolvere la seguente equazione in campo complesso

$$\left[\left(w + \frac{1+i}{1-i}\right)(w-i)\right]^2 = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{20}.$$

Svolgimento

1. $ID = \mathbb{R}$ Poiché $f(-x) = f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$, f è pari: posso studiarla per $x \geq 0$ e ribaltare poi il grafico rispetto asse y.

Per $x \geq 0$ $f(x) = \lg(x+1) + x^2 - x$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ per gli ordini

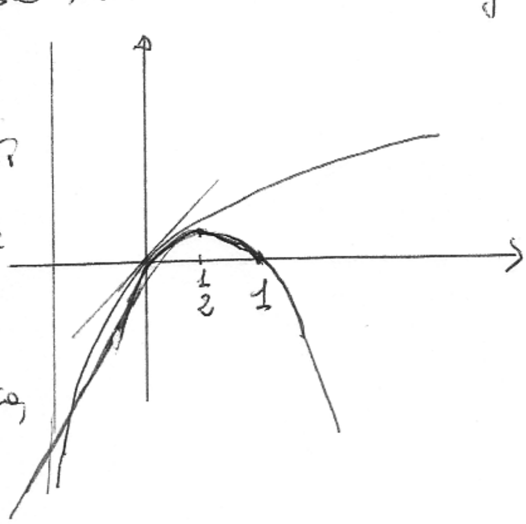
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\lg(x+1)}{x} + x - 1 = +\infty \quad \text{per gli ordini}$$

$\nexists$ asintoti di alcun tipo. $\begin{cases} x = 0 \\ y = f(0) = 0 \end{cases}$ $(0,0) \in G_f$

$f(x) > 0 \iff \lg(x+1) > x - x^2$ Anche se non è strettamente indispensabile studiare la positività, per completezza usiamo il metodo grafico

$y = \lg(x+1)$

$y = x - x^2$ $V\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$



Si vede subito che le 2 curve sono tangenti nell'origine perché hanno la stessa tangente $y = x$, quindi per $x > 0$ sicuramente la parabola sta sotto la curva logaritmica, cioè $f(x) > 0$ $\forall x > 0$

$$y' = \frac{1}{x+1} + 2x - 1 = \frac{\cancel{1} + 2x^2 + 2x - x - \cancel{1}}{x+1} = \frac{2x^2 + x}{x+1} \quad \forall x \geq 0$$

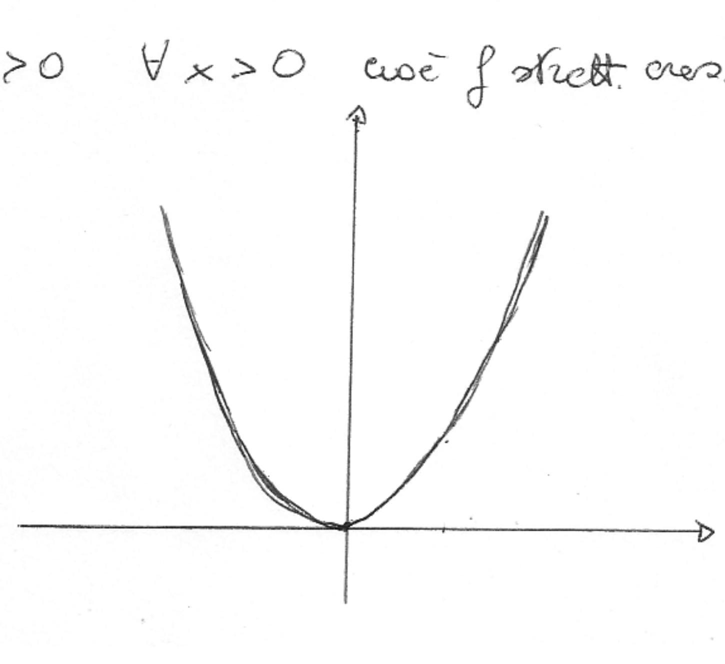
$y' > 0 \iff \begin{cases} 2x^2 + x > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow y' > 0 \quad \forall x > 0$ cioè f strett. cres.

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{2x^2 + x}{x+1} = 0$$

$$y'' = -\frac{1}{(x+1)^2} + 2 = \frac{+2x^2 + 4x + 1}{(x+1)^2}$$

$y'' > 0$ per $x > 0 \Rightarrow f$ convessa

Poiché f è pari, $f'_-(0) = -f'_+(0) = 0$



2. f è continua in $\mathbb{R}-\{1\}$ e

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{\sqrt[4]{|1-x^3|^3}} = \frac{0}{0} = 0$$

con ordine comunque grande perché il numeratore è un infinitesimo di ordine comunque grande mentre il denominatore ha ordine $\frac{3}{4}$ essendo

$$\sqrt[4]{|1-x^3|^3} = |1-x|^{3/4}\underbrace{(1+x+x^2)}_{\downarrow\, 1}{}^{3/4}.$$

Segue che f è prolungabile per continuità in $x=1$ e quindi è integrabile in $[0,1[$.

Invece $\lim_{x\to 1^+} \frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{\sqrt[4]{|1-x^3|^3}} = \frac{+\infty}{0^+} = +\infty$ con ordine comunque grande perché già il numeratore lo è

segue che f non è integrabile in $]1,2]$.

Infine $\lim_{x\to +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{\sqrt[4]{|1-x^3|^3}} = 0$ con ordine uguale a $\frac{9}{4}$ perché il numeratore tende a 1 e il denominatore tende a $+\infty$ come $x^{\frac{9}{4}}$.

Essendo $\frac{9}{4}>1$, segue che f è integrabile in $[2,+\infty)$.

3. $$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} e^x - \operatorname{arctg} e^{-x}}{e^{\operatorname{arctg} x} - e^{\operatorname{arctg}(-x)}} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{e^x}{1+e^{2x}} + \frac{e^{-x}}{1+e^{-2x}}}{e^{\operatorname{arctg} x}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) + e^{\operatorname{arctg}(-x)}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

4. Poiché $\left.\begin{aligned} &\operatorname{sen}(e^{x^2}-1) \sim e^{x^2}-1 \sim x^2 \\ &1-\cos x^3 \sim \tfrac{1}{2}(x^3)^2 = \tfrac{1}{2}x^6 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$ il numeratore è equivalente a x^2;

mentre $\operatorname{arctg}(\lg(x+1)) \sim \lg(x+1) \sim x$ ha ordine 1.

Il limite proposto vale dunque 0.

5. Poiché $\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{1-i^2} = \frac{1+i^2+2i}{1-i^2} = \frac{2i}{2} = i$ l'equazione diventa

$$\left[(w+i)(w-i)\right]^2 = i^{20} \Rightarrow \left(w^2-i^2\right)^2 = \left(i^4\right)^5$$

$$\left(w^2+1\right)^2 = 1 \Rightarrow w^2+1 = \pm 1 \;<\; \begin{array}{l} w^2 = 0 \Rightarrow w = 0 \\ w^2 = -2 \Rightarrow w = \pm\sqrt{2}\,i \end{array}$$

essendo

$$\sqrt{-2} = \left\{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi+2k\pi}{2}\right) \;\middle|\; k=0,1\right\}$$

$$= \left\{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2}\right),\ \sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{2}\pi + i\,\mathrm{sen}\,\frac{3}{2}\pi\right)\right\}$$

$$= \pm\sqrt{2}\,i$$