# COMPITO DI ISTITUZIONI DI MATEMATICHE I
## C.d.L. Chimica
## (21/02/2007)

Esercizio 1. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{1 + \big|\log(x)\big|}{1 + \log(x)}$$

e disegnarne il grafico approssimativo.

Esercizio 2. Dire, giustificando le risposte, se la funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{e^{x^2} - 1} - \sqrt{e^{x^2}}}{\log(x+1)}$$

è integrabile negli intervalli $]0,1]$, $[1,+\infty[$.

Esercizio 3. Utilizzando il Teorema di de l'Hopital calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctang}\big(e^{\operatorname{arctang}(x)}\big) - \frac{\pi}{4} e^{-\sin(x)}}{\log\big(\sin(3x) + 1\big)}.$$

Esercizio 4. Confrontando gli infinitesimi calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \big(e^x - \cos(x) + 1\big)^{\frac{1}{\log(x+1)}}.$$

Esercizio 5. Data la funzione

$$f(x) = \frac{x\sin(x) - 2\big(1 - \cos(x)\big)}{x^2 + \log^2(1 + x^2)},$$

1) calcolare la derivata di $f$;
2) scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $f$ nel punto di ascissa $x_0 = 1$.

Esercizio 6. Risolvere la seguente equazione in campo complesso

$$\big(2w^2 + (1+i)^4 i\big)^2 = (1+i)^2.$$

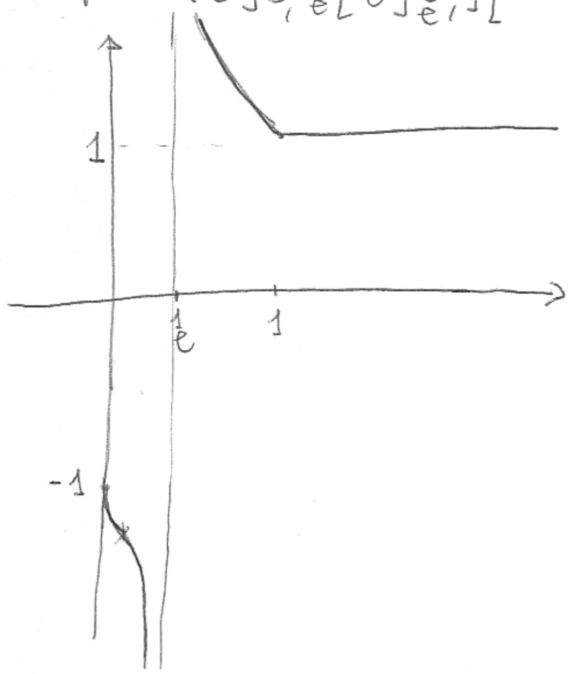
**NOTA BENE: coloro che fanno il secondo esonero devono risolvere gli esercizi 1, 2, 3, 4.**

# Svolgimento

1. $\begin{cases} x>0 \\ \lg x \neq -1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x>0 \\ x\neq e^{-1} \end{cases}$ $\quad ID = \left]0, \frac{1}{e}\right[ \cup \left]\frac{1}{e}, +\infty\right)$

Poiché $\lg x \geq 0 \iff x \geq 1$ si ha $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\lg x}{1+\lg x} & \text{se } x \in \left]0,\frac{1}{e}\right[ \cup \left]\frac{1}{e}, 1\right[ \\ 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

Basta dunque studiare la funzione $f(x)$ per $x \in \left]0, \frac{1}{e}\right[ \cup \left]\frac{1}{e}, 1\right[$

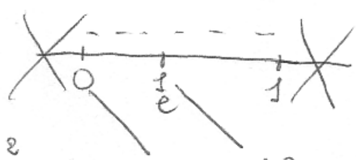



$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\lg x}{1+\lg x} \underset{\lg x = t}{=} \lim_{t\to -\infty} \frac{1-t}{1+t} = -1$$

$$\lim_{x\to \frac{1}{e}^\pm} \frac{1-\lg x}{1+\lg x} = \frac{2}{0^\pm} = \pm\infty \qquad x = \frac{1}{e} \text{ A.V.}$$

$$y' = \frac{-\frac{1}{x}(1+\cancel{\lg x}) - \frac{1}{x}(1-\cancel{\lg x})}{(1+\lg x)^2} = \frac{-2}{x(1+\lg x)^2}$$

$y' > 0 \quad x \in \emptyset$

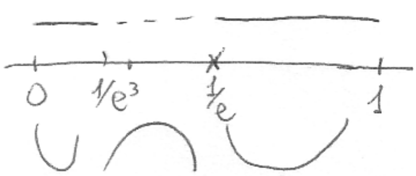



$$y'' = \frac{+2\left[(1+\lg x)^2 + \cancel{x}\cdot 2(1+\lg x)\cdot \frac{1}{\cancel{x}}\right]}{x^2(1+\lg x)^4} =$$

$$= \frac{2(1+\lg x)(3+\lg x)}{x^2(1+\lg x)^4}$$

$y'' > 0 \iff \lg x < -3 \vee \lg x > -1$

$0 < x < e^{-3} \quad \vee \quad x > e^{-1}$




Flesso in $\left(e^{-3}, f(e^{-3})\right)$

$\lim_{x\to 0^+} y' = -\infty$ perché $\lim_{x\to 0^+} x(1+\lg x)^2 = 0^+$

per gli ordini

$\lim_{x\to 1^-} y' = -2$

La funzione ha un punto angoloso in $(1,1)$ essendo $f'_s(1) = -2$ e

$f'_d(1) = 0$.

2. Poiché $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{e^{x^2}-1} - \sqrt{e^{x^2}}}{\lg(x+1)} = \dfrac{-1}{0^+} = -\infty$ con ordine 1

perché ord $\lg(x+1) = 1$ per $x \to 0$, segue che $f$ non è integrabile

in senso improprio in $]0,1]$.

Poiché $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{e^{x^2}-1} - \sqrt{e^{x^2}}}{\lg(x+1)} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{\left(\sqrt{e^{x^2}-1} - \sqrt{e^{x^2}}\right)\left(\sqrt{e^{x^2}-1} + \sqrt{e^{x^2}}\right)}{\lg(x+1)\left[\sqrt{e^{x^2}-1} + \sqrt{e^{x^2}}\right]}$

$= \lim_{x\to+\infty} \dfrac{\cancel{e^{x^2}} - 1 - \cancel{e^{x^2}}}{\lg(x+1)\left[e^{\frac{x^2}{2}}\left(\sqrt{1-e^{-x^2}} - 1\right)\right]} = 0$ con ordine grande perché $e^{x^2/2} \to +\infty$ con ordine comunque grande

segue che $f$ è integrabile in senso improprio in $[1,+\infty)$.

3. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg}\left(e^{\operatorname{arctg} x}\right) - \frac{\pi}{4} e^{-\operatorname{sen} x}}{\lg(\operatorname{sen} 3x + 1)} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{e^{\operatorname{arctg} x} \cdot \frac{1}{1+x^2}}{1+e^{2\operatorname{arctg} x}} + \frac{\pi}{4} e^{-\operatorname{sen} x} \cdot \cos x}{\dfrac{1}{\operatorname{sen} 3x + 1}(3\cos 3x)}$

$= \lim_{x\to 0} \left[\dfrac{e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)(1+e^{2\operatorname{arctg} x})} + \frac{\pi}{4} e^{-\operatorname{sen} x} \cdot \cos x\right] \dfrac{(\operatorname{sen} 3x + 1)}{3\cos 3x} = \dfrac{\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}}{3}$.

4. $\lim_{x\to 0} (e^x - \cos x + 1)^{\frac{1}{\lg(x+1)}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\lg(e^x - \cos x + 1)}{\lg(x+1)}} = e$

perché $\lim_{x\to 0} \dfrac{\lg(e^x - \cos x + 1)}{\lg(x+1)} = \lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - \cos x}{x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} + \dfrac{1-\cos x}{x} = 1$

essendo $\lg(1+x) \sim x$, $\lg(e^x - \cos x + 1) \sim e^x - \cos x$

$\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$ $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$.

5.

$$f'(x) = \frac{\left[(\operatorname{sen} x + x\cos x - 2\operatorname{sen} x)(x^2 + \lg^2(1+x^2))\right] - (x\operatorname{sen} x - 2 + 2\cos x)\left(2x + \frac{4x\lg(1+x^2)}{1+x^2}\right)}{\left[x^2 + \lg^2(1+x^2)\right]^2}$$

L'eq. della retta tangente è $y - f(1) = f'(1)(x-1)$

dove $\quad f(1) = \dfrac{\operatorname{sen} 1 - 2 + 2\cos 1}{1 + \lg^2 2}$

$$f'(1) = \frac{(-\operatorname{sen} 1 + \cos 1)(1 + \lg^2 2) - (\operatorname{sen} 1 - 2 + 2\cos 1)\left(2 + \frac{\cancel{4x}\,2\lg(2)}{2}\right)}{(1 + \lg^2 2)^2}.$$

6. Poiché $(1+i)^4 i = ((1+i)^2)^2 i = (1 + i^2 + 2i)^2 i = -4i$

l'equazione diventa

$(2\omega^2 - 4i)^2 = 2i \iff 2\omega^2 - 4i = \pm\sqrt{2i}$. Poiché

$$\sqrt{2i} = \sqrt{2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)} = \left\{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2} + i\operatorname{sen}\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2}\right) \,\middle|\, k = 0, 1\right\}$$

$$= \pm\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right) = \pm\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pm(1+i).$$

basta studiare

$$2\omega^2 - 4i = \pm(1+i) \quad < \quad \begin{array}{l} \omega^2 = \dfrac{4i + 1 + i}{2} \Rightarrow \omega = \sqrt{\dfrac{1+5i}{2}} \\[2ex] \omega^2 = \dfrac{4i - 1 - i}{2} \Rightarrow \omega = \sqrt{\dfrac{-1+3i}{2}} \end{array}$$

$$\sqrt{\frac{1+5i}{2}} = \left\{\sqrt{\frac{\sqrt{26}}{4}}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{2} + i\operatorname{sen}\frac{\theta + 2k\pi}{2}\right) \,\middle|\, k = 0, 1\right\} = \pm\frac{\sqrt{26}}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right)$$

dove $\theta$ t.c. $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{26}}$, $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{5}{\sqrt{26}}$.

Poiché $\cos\dfrac{\theta}{2} = \sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{2}} = \sqrt{\dfrac{1 + \frac{1}{\sqrt{26}}}{2}}$ e $\operatorname{sen}\dfrac{\theta}{2} = \sqrt{\dfrac{1 - \frac{1}{\sqrt{26}}}{2}}$ segue che

$$\sqrt{1+5i} = \pm\frac{\sqrt{26}}{2}\left(\sqrt{\frac{1 + \frac{1}{\sqrt{26}}}{2}} + i\sqrt{\frac{1 - \frac{1}{\sqrt{26}}}{2}}\right).$$

Analogamente si possono calcolare

$$\sqrt{\frac{-1+3i}{2}} = \pm\frac{\sqrt{10}}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right) \quad \text{dove } \theta \text{ t.c. } \cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{10}},\ \operatorname{sen}\theta = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$