

ESONERO DI ISTITUZIONI DI MATEMATICHE I

C.d.L. Chimica

(08/01/2004)

Esercizio 1. Calcolare il dominio della seguente funzione

$$f(x) = \sqrt{\frac{\log(\arcsen(\frac{1}{x}))}{\sqrt{x^2 - 1} - x}}.$$

Esercizio 2. Calcolare gli asintoti della seguente funzione

$$f(x) = 3x + 1 + \sqrt{x^2 + 6x - 3}.$$

Esercizio 3. Studiare la continuità della seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} (x^2 + x - 2)^{\frac{1}{x-1}}, & \text{se } x > 1, \\ \frac{3\sqrt{3}}{2}, & \text{se } -1 \leq x \leq 1, \\ \frac{x^3 + 1}{\log(-x)}, & \text{se } x < -1. \end{cases}$$

Esercizio 4. Data la funzione

$$f(x) = e^{x^2} \operatorname{arctg}\left(\frac{1 - x^2}{x}\right),$$

- 1) calcolare la derivata di f ;
- 2) scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = 1$.

Esercizio 5. Risolvere la seguente equazione in campo complesso

$$(1 + i + w^2)^4 = (1 + i)^4.$$

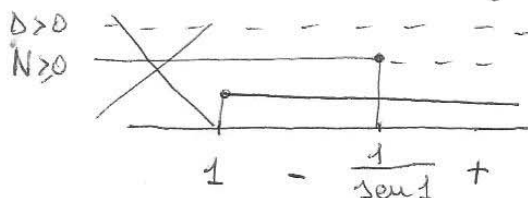
Svolgimento

1. $\frac{\lg(\arcsin \frac{1}{x})}{\sqrt{x^2-1} - x} \geq 0$ La funzione è definita per $\begin{cases} \arcsin \frac{1}{x} > 0 \\ x^2 - 1 \geq 0 \\ \sqrt{x^2-1} - x \neq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \frac{1}{x} \leq 1 \\ x \leq -1 \vee x \geq 1 \\ x^2 - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -1 \vee x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1 \quad \text{Studio il segno della funzione per } x \geq 1$$

$$N \geq 0 \Leftrightarrow \lg(\arcsin \frac{1}{x}) \geq 0 \Leftrightarrow \arcsin \frac{1}{x} \geq 1 \Leftrightarrow 1 \geq \frac{1}{x} \geq \sin 1 \Rightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{\sin 1} \\ x \geq 1 \end{cases}$$

$$D > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-1} > x \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-1 \geq 0 \\ x < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2-1 > x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq -1$$



$$ID(f) = \left[\frac{1}{\sin 1}, +\infty \right)$$

2. $x_{1/2} = -3 \pm \sqrt{9+3} = -3 \pm 2\sqrt{3}$ Poiché f è definita e continua in $ID = (-\infty, -3-2\sqrt{3}] \cup [-3+2\sqrt{3}, +\infty)$ $\nexists$ asintoti verticali

Cerchiamo eventuali asintoti orizzontali o obliqui.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x+1+\sqrt{x^2+6x-3} = +\infty \quad \nexists \text{ as. orizz. a } +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+1+|x|\sqrt{1+\frac{6}{x}-\frac{3}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(3+\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{6}{x}-\frac{3}{x^2}})}{x} = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - mx = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x+1+\sqrt{x^2+6x-3}-4x) = 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+6x-3}-x)$$

$$= 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+6x-3-x^2}{\sqrt{x^2+6x-3}+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(6-\frac{3}{x})}{x(\sqrt{1+\frac{6}{x}-\frac{3}{x^2}}+1)} = 1 + \frac{6}{2} = 4$$

$y = 4x + 4$ as. obliquo a destra

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 3x+1+\sqrt{x^2+6x-3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x+1+|x|\sqrt{1+\frac{6}{x}-\frac{3}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(3 + \frac{1}{x} - \sqrt{1 + \frac{6}{x} - \frac{3}{x^2}} \right) = -\infty \quad \text{A as. obliq. a sinistra} \quad \boxed{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(3 + \frac{1}{x} - \sqrt{1 + \frac{6}{x} - \frac{3}{x^2}} \right)}{x} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - mx = \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x + 1 + \sqrt{x^2 + 6x - 3} - 2x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \sqrt{x^2 + 6x - 3} + x = 1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 6x - 3})^2 - x^2}{\sqrt{x^2 + 6x - 3} - x} =$$

$$= 1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(6 - \frac{3}{x})}{-x(\sqrt{1 + \frac{6}{x} - \frac{3}{x^2}} + 1)} = 1 - \frac{6}{2} = -2 \quad y = 2x - 2 \quad \text{asint. obliquo a sin.}$$

• Conclusioni A asintoti verticali e/o orizzontali

$$y = 4x + 4 \quad \text{as. ob. a } +\infty \quad y = 2x - 2 \quad \text{as. ob. a } -\infty$$

3. f è continua $\forall x \neq \pm 1$; Verifico se lo è nei pti $x = \pm 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + x - 2)^{\frac{1}{x-1}} = 0$$

$$\text{essendo } \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\frac{1}{x-1} \lg(x^2 + x - 2)} = e^{+\infty \cdot (-\infty)} = e^{-\infty} = 0$$

$x = 1$ pto di discontinuità di I^a specie.

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^3 + 1}{\lg(-x)} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{\lg(-x)} = (-1) \cdot 3 = -3$$

$$\text{essendo } \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x+1}{\lg(-x)} = \lim_{x+1=y} \frac{-(-y)}{\lg(1-y)} = -1$$

$x = -1$ pto di discontinuità di I^a specie

$$\begin{aligned} 4. f'(x) &= 2x e^{x^2} \cdot \arctg \frac{1-x^2}{x} + e^{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{1-x^2}{x}\right)^2} \cdot \frac{-2x^2 - 1 + x^2}{x^2} \\ &= e^{x^2} \left[2x \arctg \frac{1-x^2}{x} + \frac{x^2 + 1}{x^4 - x^2 + 1} \right] \end{aligned}$$

Poiché $f'(1) = e \left(2 \arctan 0 - \frac{2}{1} \right) = -2e$, $f(1) = e \arctan 0 = 0$
 la retta tangente al grafico di f nel pto di ascisse 1 è

$$y = -2e(x-1)$$

$$5. (1+i+\omega^2)^4 - (1+i)^4 = 0 \Leftrightarrow [(1+i+\omega^2)^2 - (1+i)^2] [(1+i+\omega^2)^2 + (1+i)^2] = 0$$

$$\Leftrightarrow (1+i+\omega^2+1+i)(1+i+\omega^2-1-i)(\omega^4+2(1+i)\omega^2+2(1+i)^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \omega = \sqrt{-2(1+i)} = \left\{ \sqrt[4]{8 \left(\cos \frac{5\pi+2k\pi}{2} + i \sin \frac{5\pi+2k\pi}{2} \right)}, k=0,1 \right\} \pm 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{8} + i \sin \frac{5\pi}{8} \right)$$

$$\vee \omega^2 = 0 \Rightarrow \omega = 0 \text{ radice doppia}$$

$$\vee \omega^4 + 2(1+i)\omega^2 + 4i = 0 \Rightarrow \omega_{\frac{1}{2}}^2 = -1-i \pm \sqrt{(1+i)^2 - 4i} =$$

$$= -1-i \pm (1-i) = \begin{cases} -2i \\ -2 \end{cases}$$

$$\omega = \sqrt{-2i} = \left\{ \sqrt[4]{2 \left(\cos \frac{3\pi+2k\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi+2k\pi}{2} \right)}, k=0,1 \right\}$$

$$\pm \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) \pm \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \pm(-1+i)$$

$$\omega = \sqrt{-2} = \left\{ \sqrt[4]{2 \left(\cos \frac{\pi+2k\pi}{2} + i \sin \frac{\pi+2k\pi}{2} \right)}, k=0,1 \right\} = \pm \sqrt{2} i$$

Conclusione, le 8 radici dell'equazione di 8° grado sono:

$$\left\{ \pm 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{8} + i \sin \frac{5\pi}{8} \right), 0, 0, \pm(-1+i), \pm \sqrt{2} i \right\}.$$