COMPITO DI ISTITUZIONI DI MATEMATICHE I
C.d.L. Chimica - Tecnologie Chimiche
(12/12/2006)

Esercizio 1. Studiare la funzione

$$f(x) = (x-1)\sqrt{|x|}$$

e disegnarne il grafico approssimativo. Dire inoltre se essa è continua, derivabile, invertibile e determinarne il codominio.

Esercizio 2. Dire, giustificando le risposte, se la funzione

$$f(x) = \left(\frac{\log(x+1)}{x} + \left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} + \frac{1}{x} \right)^2 \right)^{\frac{1}{4}}$$

è integrabile negli intervalli $]0,1]$, $[1,+\infty[$.

Esercizio 3. Utilizzando il Teorema di de l'Hopital calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - \operatorname{arctang}(x^2)}{\operatorname{sen}(x)}.$$

Esercizio 4. Confrontando gli infinitesimi calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3+1}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{3}x}.$$

Esercizio 5. Risolvere la seguente equazione in campo complesso

$$\left(\left(w + \frac{i-1}{i+1} \right)(w-i) \right)^4 = \left(\frac{1-i}{1+i} \right)^{50}.$$

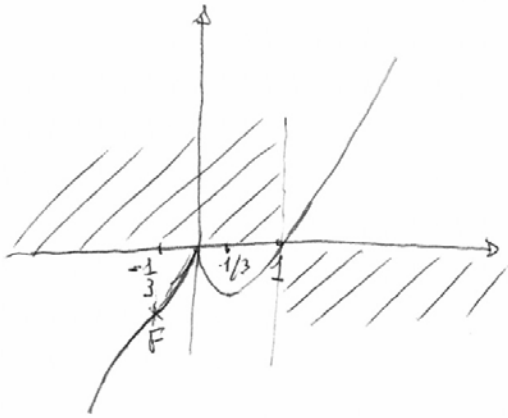
1. $f(x) = (x-1)\sqrt{|x|}$ $\quad$ $ID = \mathbb{R}$ $\quad$ $f \geq 0 \iff x \geq 1$

$f(x) = 0 \iff x = 1 \vee x = 0$ $\quad (1,0)\ (0,0)$ intersezioni con assi

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ $\nexists$ as. orizz. $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x-1}{x}\sqrt{|x|} = +\infty$

$\nexists$ asint. verticali essendo f cont su $\mathbb{R}$ $\quad$ $\nexists$ as. obliqui

$y' = \sqrt{|x|} + (x-1)\frac{1}{2\sqrt{|x|}}\cdot\frac{x}{|x|}$ $\quad \forall x \neq 0$



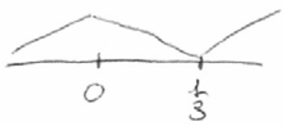
$\lim_{x\to0^\pm} y' = \lim_{x\to0^\pm} \sqrt{\pm x} + \frac{x-1}{2\sqrt{\pm x}}(\pm 1) = \mp\infty$

$x = 0$ pto cuspidale per f

$y' > 0 \iff \sqrt{|x|} + (x-1)\frac{1}{2\sqrt{|x|}}\cdot\frac{|x|}{x} > 0$

$y' = \frac{2(x)^2 + (x-1)(x)}{2|x|\sqrt{|x|}} = \frac{(x)\ (2x+x-1)}{2|x|\sqrt{|x|}} = \frac{(-1+3x)\ (x)}{2|x|\sqrt{|x|}}$ e quindi

$y' > 0 \iff \frac{3x-1}{x} > 0 \iff x < 0 \vee x > \frac{1}{3}$



$y' = \begin{cases} \frac{3x-1}{2\sqrt{x}} & \text{se } x > 0 \\ -\frac{3x-1}{2\sqrt{-x}} & \text{se } x < 0 \end{cases}$

$M(0,0)$ $\quad$ $m\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$

$y'' = \begin{cases} \frac{1}{2}\ \frac{3\sqrt{x} - (3x-1)/2\sqrt{x}}{x} = \frac{3x+1}{4x\sqrt{x}} & \text{se } x > 0 \\ \frac{1}{2}\ \frac{-3\sqrt{-x} - (3x-1)/2\sqrt{-x}}{-x} = \frac{3x+1}{-4x\sqrt{-x}} & \text{se } x < 0 \end{cases}$

$y'' > 0 \iff \begin{cases} x > 0 \\ 3x+1 > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ 3x+1 > 0 \end{cases} \iff x > -\frac{1}{3}$ con $x \neq 0$

$F\left(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$

f è continua perchè prodotto e composta di funzioni continue,

f è derivabile tranne che in $x = 0$, pto cuspidale

f non è invertibile perchè non iniettiva, $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

2. f è integrabile in senso improprio in $]0,1]$ essendo

$$\lim_{x\to 0} \sqrt[4]{\frac{\lg(1+x)}{x} + \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} + \frac{1}{x}\right)^2} = +\infty \quad \text{con ordine } \frac{1}{2} < 1$$

essendo $\frac{\lg(1+x)}{x} \to 1$, $\frac{\operatorname{sen} x}{x} \to 1$ e quindi

$$f \sim \sqrt[4]{1+\left(1+\frac{1}{x}\right)^2} \sim \sqrt[4]{\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{|x|}} \quad \text{per } x \to 0$$

f non è integrabile in $[1,+\infty)$ essendo

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \quad \text{con ord. } \frac{1}{2} < 1 \quad \text{in quanto}$$

$\frac{\lg(x+1)}{x} \to 0$ (per ordini), $\frac{\operatorname{sen} x}{x} \to 0$ (prodotto di $\operatorname{sen} x$ limitato per $\frac{1}{x}$ infinitesimo) e quindi

$$f \sim \sqrt[4]{\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{|x|}} \quad \text{per } x \to +\infty.$$

3. $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - \operatorname{arctg} x^2}{\operatorname{sen} x} = \frac{0}{0} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - \frac{2x}{1+x^4}}{\cos x} = 1$$

4. $$\lim_{x\to -1} \frac{x^3+1}{\sqrt{x^2+2} + \sqrt{3}\,x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x^2-x+1)(\sqrt{x^2+2} - \sqrt{3}x)}{(\sqrt{x^2+2})^2 - (\sqrt{3}\,x)^2}$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)}{x^2+2-3x^2}(x^2-x+1)(\sqrt{x^2+2} - \sqrt{3}x) =$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{\cancel{x+1}}{2(1-x)\cancel{(1+x)}}(x^2-x+1)(\sqrt{x^2+2} - \sqrt{3}\,x) = \frac{\cancel{2}\cdot 3\sqrt{3}}{\cancel{4}_2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

il limite esiste finito $\neq 0$ essendo sia numeratore che denominatore infinitesimi dello stesso ordine.

5. $$\left(\left(\omega + \frac{(i-1)^2}{i^2-1}\right)(\omega - i)\right)^4 = \left[\frac{(1-i)^2}{1-i^2}\right]^{50}$$

$$\left(\left(\omega + \frac{\cancel{i^2+1}-2i}{-2}\right)(\omega-i)\right)^4 = \left(\frac{\cancel{1+i^2}-2i}{2}\right)^{50}$$

$$\left((\omega+i)(\omega-i)\right)^4 = (-i)^{50} \qquad (\omega^2-i^2)^4 = \left[(-i)^2\right]^{25}$$

$$(\omega^2+1)^4 = (-1)^{25} \qquad (\omega^2+1)^4 = -1 \qquad \omega^2+1 = \sqrt[4]{-1}$$

Poiché $\sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{\cos\pi + i\,\mathrm{sen}\,\pi} = \left\{\cos\frac{\pi+2k\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4}+2k\pi\right\}$ $k=0,1,2,3$

si ha $\sqrt[4]{-1} = \left\{\cos\frac{\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4},\ \cos\frac{3}{4}\pi + i\,\mathrm{sen}\,\frac{3}{4}\pi,\ \cos\frac{5}{4}\pi + i\,\mathrm{sen}\,\frac{5}{4}\pi,\ \cos\frac{7}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{7}{4}\pi\right\} = \left\{\pm\frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\frac{\sqrt{2}}{2},\ \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \mp i\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}.$

e quindi $\omega^2 = \sqrt[4]{-1} - 1 = \left\{\pm\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \pm i\frac{\sqrt{2}}{2},\ \pm\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \mp i\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}.$

L'equazione ha 8 soluzioni nel campo complesso

date dalle radici quadrate

$$\sqrt{\pm\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \pm i\frac{\sqrt{2}}{2}}\ , \qquad \sqrt{\pm\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \mp i\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

che lasciamo indicate perché non si ottengono archi noti.