

**COMPITO DI ISTITUZIONI DI MATEMATICHE I**  
**C.d.L. Chimica - Tecnologie Chimiche**  
**(05/10/2006)**

Esercizio 1. Studiare la funzione

$$f(x) = \sqrt{|x^2 + x|} - x$$

e disegnarne il grafico approssimativo. Dire inoltre se essa è continua, derivabile, invertibile e determinarne il codominio.

Esercizio 2. Dire, giustificando le risposte, se la funzione

$$f(x) = \log(x)\log(x+1)$$

è integrabile negli intervalli  $]0, 1]$ ,  $[1, +\infty[$ .

Esercizio 3. Utilizzando il Teorema di de l'Hopital calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sin(x) + \cos(x))^{\frac{2}{\tan(x)}}.$$

Esercizio 4. Confrontando gli infinitesimi calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1 - \frac{1}{2}(e^x - 1)^2}{\sin^2(x) + x \log(1+x)}.$$

Esercizio 5. Risolvere la seguente equazione in campo complesso

$$w^2 + 2|w|^2 + \overline{w}^2 = \left( \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right)^{30}.$$

## Svolgimento

1.  $ID = \mathbb{R}$   $f$  non è pari né dispari  $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \begin{cases} y=0 \\ \sqrt{x^2+x}=x \Leftrightarrow |x^2+x|=x^2 \\ x \geq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow x^2+x=x^2 \vee x^2+x=-x^2 \Rightarrow x=0 \vee x=-\frac{1}{2}$  non acc.

$(0,0)$  unica intersezione  $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+x} \geq x \Leftrightarrow x \leq 0 \vee$

$\begin{cases} x \geq 0 \\ |x^2+x| \geq x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq 0 \vee \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2+x \geq x^2 \\ x^2+x \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 0 \\ -x^2-x \geq x^2 \\ x^2+x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq 0 \vee x \geq 0$   
 $f(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+x} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+x} - x}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1)} = \frac{1}{2}$

essendo  $x^2+x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -1 \vee x \geq 0$

$y = \frac{1}{2}$  As. obliq.  
a + $\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2+x} - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2+x} - x = +\infty$  As. obliq. a - $\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+x} - x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1)}{x} = -2$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2+x} - x + 2x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2+x} + x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}-x} =$

$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-x(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1)} = -\frac{1}{2}$

$y = -2x - \frac{1}{2}$  As. obliq.  
a - $\infty$

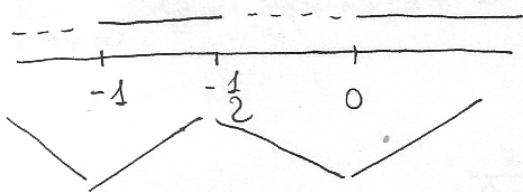
$y' = \frac{1}{2\sqrt{|x^2+x|}} \cdot \frac{x^2+x}{|x^2+x|} (2x+1) - 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ s' } x^2+x \neq 0 \quad x \neq 0, -1$

$y' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x > 0 \\ \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} > 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2+x < 0 \\ -\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \vee x > 0 \\ 2x+1 > 2\sqrt{x^2+x} \end{cases} \vee$

$\begin{cases} -1 < x < 0 \\ -2x-1 > 2\sqrt{x^2+x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \vee x > 0 \\ x > -\frac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} -1 < x < 0 \\ -2x-1 > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \vee -1 < x < -\frac{1}{2} \\ 8x^2 + 8x + 1 > 0 \quad \forall x \end{cases}$$

conclusione  $y' > 0$  per  $-1 < x < -\frac{1}{2}$   $\vee$   $x > 0$



$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2} & \text{MAX rel. per } f \\ y = 1 \end{cases}$$

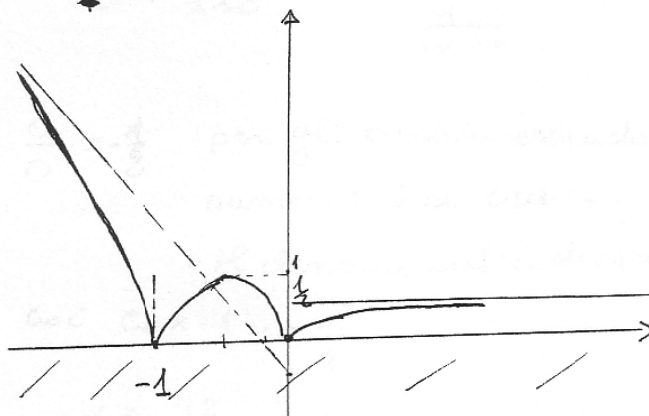
$x = 0, -1$  mini-relativi e pli di cuspidi

perci  $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} y' = \lim_{x \rightarrow 0^\pm} \pm \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} - 1 = \pm \infty$

$$\lim_{x \rightarrow -1^\pm} y' = \lim_{x \rightarrow -1^\pm} \pm \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} - 1 = \pm \infty$$

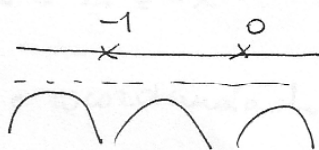
$$y'' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x > 0 \\ \frac{1}{2} \left[ \frac{2\sqrt{x^2+x} - (2x+1)^2}{2\sqrt{x^2+x}} \right] > 0 \end{cases}$$

$$\vee \begin{cases} x^2 + x < 0 \\ \frac{1}{2} \left[ \frac{-2\sqrt{-x^2-x} - (2x+1)^2}{2\sqrt{-x^2-x}} \right] > 0 \end{cases}$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \vee x > 0 \\ 4(x^2+x) - 4x^2 - 4x - 1 > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} -1 < x < 0 \\ -4(-x^2-x) - (2x+1)^2 > 0 \\ +4x^2 + 4x - 4x^2 - 1 - 4x > 0 \end{cases}$$

$$y'' > 0 \text{ mai}$$



$f$  è concava in  $(-\infty, -1]$ ,  
in  $[-1, 0]$  e in  $[0, +\infty)$

$f$  è sempre continua, è derivabile tranne che in  $0, 1$   
(pli cuspidali), non è invertibile perché non è iniettiva  
e il suo codominio vale  $[0, +\infty)$ .

2)  $f$  è integrabile in  $]0, 1]$  perché continua e  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \lg x \cdot \lg(x+1)$

$$= -\infty \cdot 0 = 0 \text{ perché prodotto di } \lg x \rightarrow -\infty \text{ moltiplicato per } \lg(x+1) \rightarrow 0 \text{ con ord. 1}$$

$f$  non è integrabile in  $[1, +\infty)$  perché

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \lg x \cdot \lg(x+1) = +\infty$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x + \cos x)^{\frac{2}{\lg x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{2}{\lg x} \lg(\sin x + \cos x)} = e^2$$

essendo  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \lg(\sin x + \cos x)}{\lg x} = \frac{0}{0} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{\sin x + \cos x} (\cos x - \sin x)}{\frac{1}{\cos^2 x}} = 2.$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 - \frac{1}{2}(e^x - 1)^2}{\sin^2 x + x \lg(1+x)} = \frac{0}{0} = -\frac{1}{2} \quad \text{per gli ordini essendo il numeratore di ordine 2 e il denominatore di ord. 2}$$

In fatti  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}$  cioè  $\cos x - 1 \sim -\frac{x^2}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}(e^x - 1)^2}{x^2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2}(e^x - 1)^2 \sim -\frac{x^2}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = 1 \Rightarrow \sin x \sim x^2, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \lg(1+x)}{x^2} = 1 \Rightarrow x \lg(1+x) \sim x^2$$

Dunque  $N \sim -\frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2} = -x^2 \quad D \sim x^2 + x^2 = 2x^2$

$$5. \text{ Posto } \omega = x + iy \text{ e ricordando che } \left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}\right)^3 = \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$\stackrel{\text{Moivre}}{=} \cos(-10\pi) + i \sin(-10\pi) = \cos 10\pi + i \sin 10\pi = 1$ , l'equazione diventa

$$(x + iy)^2 + 2(x^2 + y^2) + (x - iy)^2 = 1 \Rightarrow x^2 + 2xyi - y^2 + 2x^2 + 2y^2 + x^2 - 2xyi - y^2 = 1$$

$$\Rightarrow 4x^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{1}{2} \\ y \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \omega = \pm \frac{1}{2} + iy \text{ con } y \in \mathbb{R}$$

L'equazione ha dunque infinite soluzioni date da tutti i punti del piano complesso che si trovano

sulle rette di equazione  $x = \pm \frac{1}{2}$  e  $x = -\frac{1}{2}$ .

