

COMPITO DI ISTITUZIONI DI MATEMATICHE I
C.d.L. Chimica - Tecnologie Chimiche
(08/09/2006)

Esercizio 1. Studiare la funzione

$$f(x) = \log(x) + |x^2 - 4|$$

e disegnarne il grafico approssimativo. Dire inoltre se essa è continua, derivabile, invertibile e determinarne il codominio.

Esercizio 2. Dire, giustificando le risposte, se la funzione

$$f(x) = \frac{e^x - \cos(x)}{\log(1 + x^2)}$$

è integrabile negli intervalli $]0, 1]$, $[1, +\infty[$.

Esercizio 3. Utilizzando il Teorema di de l'Hopital calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin(x) - x + \cos^2(x) - 1}{\sqrt{\arctan(x)}}.$$

Esercizio 4. Confrontando gli infinitesimi calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \log(x) \log(x + 1).$$

Esercizio 5. Risolvere la seguente equazione in campo complesso

$$\left(\frac{i - 1}{i + 1} \right)^{37} w^2 - |w|^2 = 0.$$

Svolgimento

1. $ID =]0, +\infty)$ $f(x) > 0$ non si può studiare direttamente

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \text{ (per gli ordini)}$$

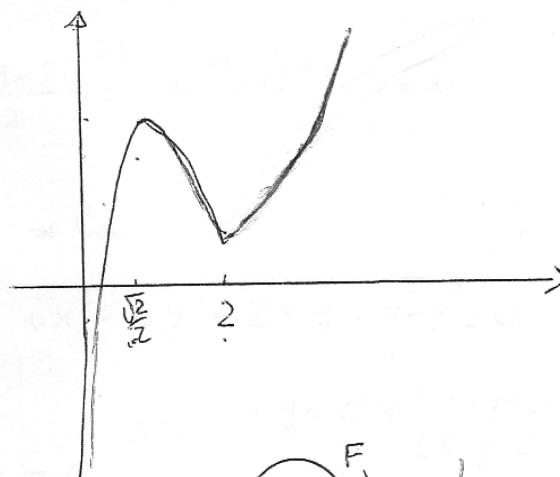
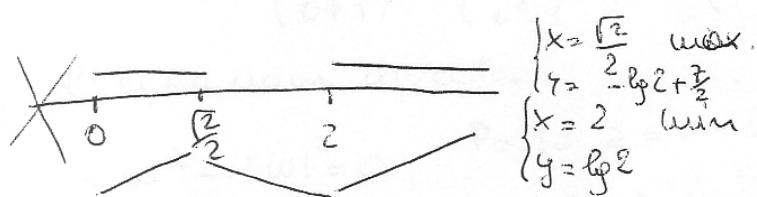
$x = 0$ as. verticale. As. orizzontali né obliqui.

$$y' = \frac{1}{x} + \frac{x^2-4}{|x^2-4|} \cdot 2x = \begin{cases} \frac{1}{x} + 2x & \text{se } x^2-4 > 0 \text{ cioè } x > 2 \\ \frac{1}{x} - 2x & \text{se } x^2-4 < 0 \text{ cioè } 0 < x < 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} y' = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x} - 2x = -\frac{3}{2} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} y' = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x} + 2x = \frac{9}{2} \quad x=2 \text{ pto angolare}$$

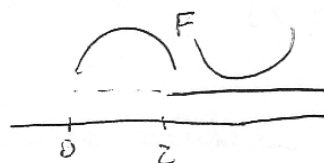
$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 2 \\ \frac{1}{x} - 2x > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x > 2 \\ \frac{1}{x} + 2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 2 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x > 2 \\ \forall x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in]0, \frac{\sqrt{2}}{2}[\cup]2, +\infty)$$



$$y'' = \begin{cases} -\frac{1}{x^2} + 2 & \text{se } x > 2 \\ -\frac{1}{x^2} - 2 & \text{se } 0 < x < 2 \end{cases}$$

$$y'' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 2 \\ -\frac{1}{x^2} - 2 > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x > 2 \\ -\frac{1}{x^2} + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2$$



f è continua ma non derivabile in $]0, +\infty)$ (in $x=2$ c'è un punto angolare) e il suo codominio è tutto $\mathbb{R}$.

$$2. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - \cos x}{\ln(1+x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1+x+\frac{x^2}{2}+O(x^2)-1+\frac{x^2}{2}}{x^2-\frac{x^4}{2}+O(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x^2} = +\infty$$

con ordine 1 $\Rightarrow f$ non è integrabile in senso improprio in $]0, 1]$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - \cos x}{\ln(1+x^2)} = +\infty$ (con ordine grande) $\Rightarrow f$ non è integrabile in senso improprio in $[1, +\infty)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x - x + \cos^2 x - 1}{\sqrt{\arctan x}} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x \cos x - 1 - 2 \sin x \cos x}{\frac{1}{2\sqrt{\arctan x}} - \frac{1}{1+x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} 2\sqrt{\arctan x} (1+x^2) (\sin x + x \cos x - 1 - 2 \sin x \cos x) = 0$$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \lg x \cdot \lg(x+1) = (-\infty) \cdot 0 = 0$ perché $\lim_{x \rightarrow 0} \lg x = -\infty$ con ordine infinito

mentre $\lim_{x \rightarrow 0} \lg(x+1) = 0$ con ord. 1. Quindi se si scrive

il limite come rapporto $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg(x+1)}{\lg x} = 0$ perché prevale

l'infinitesimo del numeratore.

5. Perché $\left(\frac{i-1}{i+1}\right)^{37} = \left[\frac{(i-1)^2}{i^2-1}\right]^{37} = \left(\frac{-1+1-2i}{-2}\right)^{37} = i^{37} = (i^4)^9 \cdot i = i$

l'equazione diventa

$i w^2 - |w|^2 = 0$ Poiché $z = x + iy$ si ha

$$i(x^2 + i^2 y^2 + 2xyi) - x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow ix^2 - iy^2 - 2xy - x^2 - y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + 2xy = 0 \\ x^2 - y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 = 0 \\ (x-y)(x+y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x+y=0 \vee \begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x+y=0$ Dunque l'eq. ha infinite soluzioni

del tipo $z = x - ix$ rappresentate nel piano

complesso da tutti i punti della bisettrice $x+y=0$.