

COMPITO DI ISTITUZIONI DI MATEMATICHE I
C.d.L. Chimica - Tecnologie Chimiche
(18/07/2006)

Esercizio 1. Studiare la funzione

$$f(x) = \arctang(x) + \log(1 + x^2)$$

e disegnarne il grafico approssimativo. Dire inoltre se essa è continua, derivabile, invertibile e determinarne il codominio.

Esercizio 2. Dire, giustificando le risposte, se la funzione

$$f(x) = \frac{\log(1 + \sqrt{x}) + \arcsen(x)}{e^x - 1}$$

è integrabile negli intervalli $]0, 1]$, $[1, +\infty[$.

Esercizio 3. Utilizzando il Teorema di de l'Hopital calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - 2(1 - \cos(\sqrt{x}))}{\log(1 + \sqrt{x})}.$$

Esercizio 4. Confrontando gli infinitesimi calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + x^2) - (1 - \cos(2x))}{e^x - 1 + \arctang(x^2)}.$$

Esercizio 5. Risolvere la seguente equazione in campo complesso

$$\bar{w}^2 + w - \left(\frac{1}{i}\right)^4 = 0.$$

SVOLGIMENTO

1. $ID = \mathbb{R}$ $f(-x) \neq f(x)$ f non è pari né dispari $f(0) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{\arctg x}{x} + \frac{\lg(1+x^2)}{x} = 0$$

Asintoti di alcuni tipi

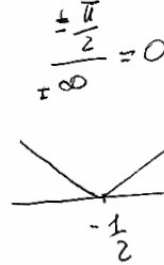
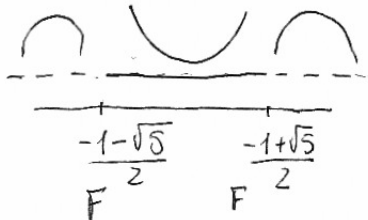
$$y' = \frac{1}{1+x^2} + \frac{2x}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$y' > 0 \Leftrightarrow 2x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$$

$$y'' = \frac{2(1+x^2) - 2x(1+2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x-x^2)}{(1+x^2)^2}$$

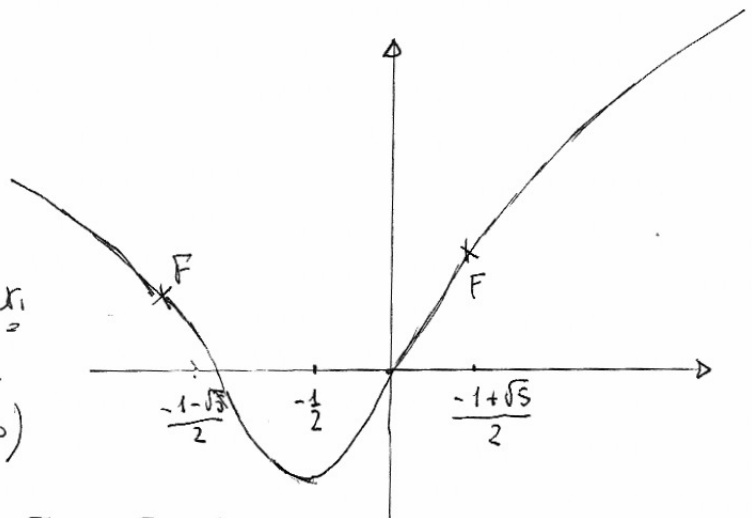
$$y'' > 0 \Leftrightarrow x^2+x-1 < 0$$

$$-\frac{1-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$



$$m \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -\arctg \frac{1}{2} + \lg \frac{5}{4} \end{cases}$$

f è continua e derivabile in tutto $\mathbb{R}$, non è invertibile perché non è iniettiva
 $f(\mathbb{R}) = [-\arctg \frac{1}{2} + \lg \frac{5}{4}, +\infty)$



2. f è continua in $ID =]0, 1]$. Sicuramente non è continua integrabile in $[1, +\infty)$ perché non è definita, mentre lo è in $]0, 1]$ essendo $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg(1+\sqrt{x}) + \arcsen x}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} + x}{x} = +\infty$

con ordine $\frac{1}{2} < 1$ in quanto $\lg(1+\sqrt{x}) \sim \sqrt{x}$
 $\arcsen x \sim x$
 $e^x - 1 \sim x$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - 2(1 - \cos \sqrt{x})}{\ln(1 + \sqrt{x})} = \frac{0}{0} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cancel{2} \sin \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{1+\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}} \quad |2$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{(1 + \sqrt{x})}_{\downarrow 1} \underbrace{2\sqrt{x}}_{\downarrow 0} \left(\underbrace{e^x}_{\downarrow 1} - \underbrace{\frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}}}_{\downarrow 1} \right) = 0$$

$$4. \quad \text{Poiché} \quad \text{ord } \ln(1+x^2) = 2 \quad \text{essendo} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} = 1$$

$$\text{ord } (1 - \cos 2x) = 2 \quad \text{essendo} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{(2x)^2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{ord } \ln(1+\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \quad \text{essendo} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = 1$$

il numeratore ha ord. ≥ 2 (in realtà $= 2$)

il denominatore ha ord. $\frac{1}{2}$ e quindi il limite sale 0.

$$5. \quad \text{Poiché} \quad \left(\frac{1}{i}\right)^4 = (-i)^4 = 1 \quad \text{pongo } w = x + iy \text{ l'eq. diventa}$$

$$(x - iy)^2 + (x + iy) - 1 = 0 \quad x^2 - y^2 + x - 1 + i(-2xy + y) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + x - 1 = 0 \\ -2xy + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + x - 1 = 0 \\ y(1 - 2x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x^2 + x - 1 = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} - y^2 + \frac{1}{2} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y^2 = \frac{1}{4} \\ y = \pm \frac{1}{2} \end{cases}$$

$w = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i$ l'eq. ha 2 sol. complesse coniugate