

COMPITO DI ISTITUZIONI DI MATEMATICHE I
C.d.L. Chimica - Tecnologie Chimiche
(10/07/2006)

Esercizio 1. Studiare la funzione

$$f(x) = x(\log(x) + \sqrt{2}\log^2(x))$$

e disegnarne il grafico approssimativo. Dire inoltre se essa è continua, derivabile, invertibile e determinarne il codominio.

Esercizio 2. Dire, giustificando le risposte, se la funzione

$$f(x) = \frac{1 + \cos(\sqrt{x}) + \log(1 + x^2)}{(e^x - 1)\arctang(x)}$$

è integrabile negli intervalli $]0, 1]$, $[1, +\infty[$.

Esercizio 3. Utilizzando il Teorema di de l'Hopital calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + x^2) - (1 - \cos(2x))}{e^x - 1 + \arctang(x^2)}.$$

Esercizio 4. Confrontando gli infinitesimi calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - 2(1 - \cos(\sqrt{x}))}{\log(1 + \sqrt{x})}.$$

Esercizio 5. Risolvere la seguente equazione in campo complesso

$$\left(\overline{w} + \left(\frac{2+i}{1-2i} \right)^{32} \right)^4 = \overline{\left(\frac{3+i}{1-3i} \right)}.$$

SVOLGIMENTO

$$1. ID =]0, +\infty)$$

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow \lg x + \sqrt{2} \lg^2 x > 0 \Leftrightarrow \lg x < -\frac{1}{\sqrt{2}} \vee \lg x > 0$$

$$0 < x < e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} \vee x > 1$$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\lg x + \sqrt{2} \lg^2 x) = 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\lg x + \sqrt{2} \lg^2 x) = +\infty$ per gli ordini

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\lg x + \sqrt{2} \lg^2 x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \text{ Asintote di alcun tipo}$$

$$y' = \lg x + \sqrt{2} \lg^2 x + x \left(\frac{1}{x} + 2\sqrt{2} \lg x \cdot \frac{1}{x} \right)$$

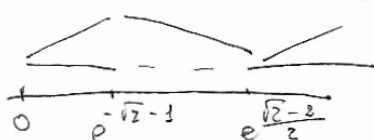
$$= \sqrt{2} \lg^2 x + (1 + 2\sqrt{2}) \lg x + 1$$

$$y' > 0 \quad \sqrt{2} \lg^2 x + (1 + 2\sqrt{2}) \lg x + 1 > 0$$

$$(\lg x)_{\pm} = \frac{-1 - 2\sqrt{2} \pm \sqrt{1 + 8 + 4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}$$

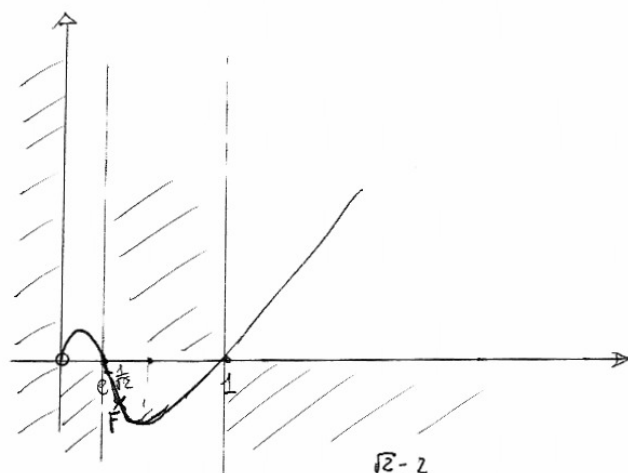
$$\lg x < -\sqrt{2} - 1 \vee \lg x > \frac{\sqrt{2} - 2}{2}$$

$$0 < x < e^{-\sqrt{2}-1} \vee x > e^{\frac{\sqrt{2}-2}{2}}$$



$$H \begin{cases} x = e^{-\sqrt{2}-1} \\ y = e^{-\sqrt{2}-1} (2\sqrt{2} + 3) \end{cases}$$

$$m \begin{cases} x = e^{\frac{\sqrt{2}-2}{2}} \\ y = e^{\frac{\sqrt{2}-2}{2}} \left(\frac{7\sqrt{2}-10}{2} \right) \end{cases}$$

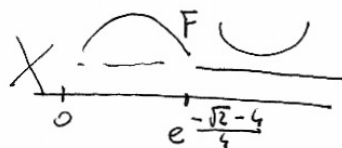


$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y' = +\infty - \infty = +\infty \text{ (per gli ordini)}$$

$$y'' = 2\sqrt{2} \lg x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1 + 2\sqrt{2}}{x} = \frac{2\sqrt{2} \lg x + 1 + 2\sqrt{2}}{x}$$

$$y'' > 0 \Leftrightarrow \lg x > -\frac{1 + 2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \lg x > -\frac{\sqrt{2}-4}{4} \quad x > e^{-\frac{\sqrt{2}-4}{4}}$$



f è continua e derivabile in ID , non è invertibile perché

non è iniettiva e il suo codominio è $= [e^{\frac{\sqrt{2}-2}{2} \left(\frac{7\sqrt{2}-10}{2} \right)}, +\infty)$.

$$2. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + \cos \sqrt{x} + \lg(1+x^2)}{(e^x - 1) \arcsin x} = \frac{2}{0^+} = +\infty \quad \text{con ord. } 2 > 1 \Rightarrow$$

$\downarrow \quad \downarrow$
 $0^+ \quad 0^+$
 con ord. 1 con ord. 1

f non è integrabile in a.i. in $]0, 1]$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \cos \sqrt{x} + \lg(1+x^2)}{(e^x - 1) \arcsin x} = 0 \quad \text{con ord. } 2 > 1 \Rightarrow$$

$\downarrow \quad \downarrow$
 $+\infty \quad \frac{\pi}{2}$
 con ord. grande

f non è integrabile in a.i. in $[1, +\infty)$.

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg(1+x^2) - (1 - \cos 2x)}{e^x - 1 + \arcsin x^2} = \frac{0}{0} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2x}{1+x^2} - 2 \sin 2x}{e^x + \frac{2x}{1+x^2}} = \frac{0}{1} = 0$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - 2(1 - \cos \sqrt{x})}{\lg(1 + \sqrt{x})} = 0 \quad \text{per gli ordini perde}$$

$\text{ord}(e^x - 1) = 1 \quad \text{ord}(1 - \cos \sqrt{x}) = 1 \Rightarrow \text{ord Numer.} \geq 1$
 In realtà ord Numer. > 1 essendo $e^x - 1 \sim x$ $2(1 - \cos \sqrt{x}) \sim x$
 $\text{ord}[\lg(1 + \sqrt{x})] = \frac{1}{2}$

$$5. \left(\frac{2+i}{1-2i} \right)^{32} = \left[\frac{(2+i)(1+2i)}{1-4i^2} \right]^{32} = \left[\frac{2+i+4i+2i^2}{5} \right]^{32} = \left[\frac{0+5i}{5} \right]^{32} = i^{32} = 1$$

$$\overline{\frac{3+i}{1-3i}} = \frac{(3+i)(1+3i)}{10} = \frac{3+i+9i+3i^2}{10} = \frac{0+10i}{10} = i = -\overline{i}$$

$$\overline{\omega} = \sqrt[4]{-i} - 1 = \left\{ \cos \frac{3\pi + 2K\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi + 2K\pi}{4} \mid K=0,1,2,3 \right\} - 1$$

$$\omega_0 = \cos \frac{3}{8}\pi - 1 - i \sin \frac{3}{8}\pi \quad \omega_1 = \cos \frac{7}{8}\pi - 1 - i \sin \frac{7}{8}\pi$$

$$\omega_2 = \cos \frac{11}{8}\pi - 1 - i \sin \frac{11}{8}\pi \quad \omega_3 = \cos \frac{15}{8}\pi - 1 - i \sin \frac{15}{8}\pi$$