COMPITO DI ISTITUZIONI DI MATEMATICHE I
C.d.L. Chimica - Tecnologie Chimiche
(26/06/2006)

Esercizio 1. Studiare la funzione

$$f(x) = x - \operatorname{arctang}\left(\frac{x}{|x-1|}\right)$$

e disegnarne il grafico approssimativo. Dire inoltre se essa è continua, derivaile, invertibile e determinarne il codominio.

Esercizio 2. Dire, giustificando le risposte, se la funzione

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$$

è integrabile negli intervalli $]0,1]$, $[1,+\infty[$.

Esercizio 3. Utilizzando il Teorema di de l'Hopital calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 + \log(1-x)}{\operatorname{tang}(x) - x}.$$

Esercizio 4. Confrontando gli infinitesimi calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)(1-\cos(x))}{\operatorname{arctang}^2(x) + 2^{x^2} - 1}.$$

Esercizio 5. Risolvere la seguente equazione in campo complesso

$$|w|^2 + \bar{w} + \frac{1+i}{1-i} = \sqrt{2}\sqrt{\frac{1+i}{1-i}}.$$

Svolgimento

$ID = \mathbb{R} - \{1\}$ $\quad \lim_{x\to 1} f(x) = 1-\frac{\pi}{2}$ $\quad \nexists$ asintoti verticali

f si può prolungare per continuità in $x = 1$

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ $\nexists$ as. orizzontali $\quad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=1$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)-mx = \lim_{x\to\pm\infty} -\operatorname{arctg}\frac{x}{\pm(x-1)} = -\operatorname{arctg}(\pm 1)=\mp\frac{\pi}{4}$$

$$y' = 1 - \frac{1}{1+\frac{x^2}{(x-1)^2}} \cdot \frac{|x-1| - \frac{x(x-1)}{|x-1|}}{(x-1)^2} = 1 - \frac{\cancel{(x-1)^2}}{(x-1)^2+x^2}\cdot\frac{(x-1)^2-x^2+x}{\cancel{(x-1)^2}\,|x-1|}$$

$$= 1+ \frac{x-1}{|x-1|}\cdot\frac{1}{(x-1)^2+x^2} = \begin{cases} 1+\dfrac{1}{(x-1)^2+x^2} & \text{se } x>1 \\[2ex] 1-\dfrac{1}{(x-1)^2+x^2} & \text{se } x<1 \end{cases}$$

$y'>0 \iff x>1 \lor \begin{cases} x<1 \\ x^2-x>0 \end{cases} \iff x>1 \lor x<0$

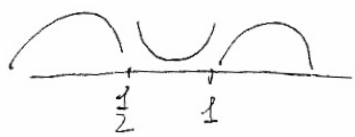
$M \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ $\quad \lim_{x\to 1^-} y'=0 \quad \lim_{x\to 1^+} y'=2$

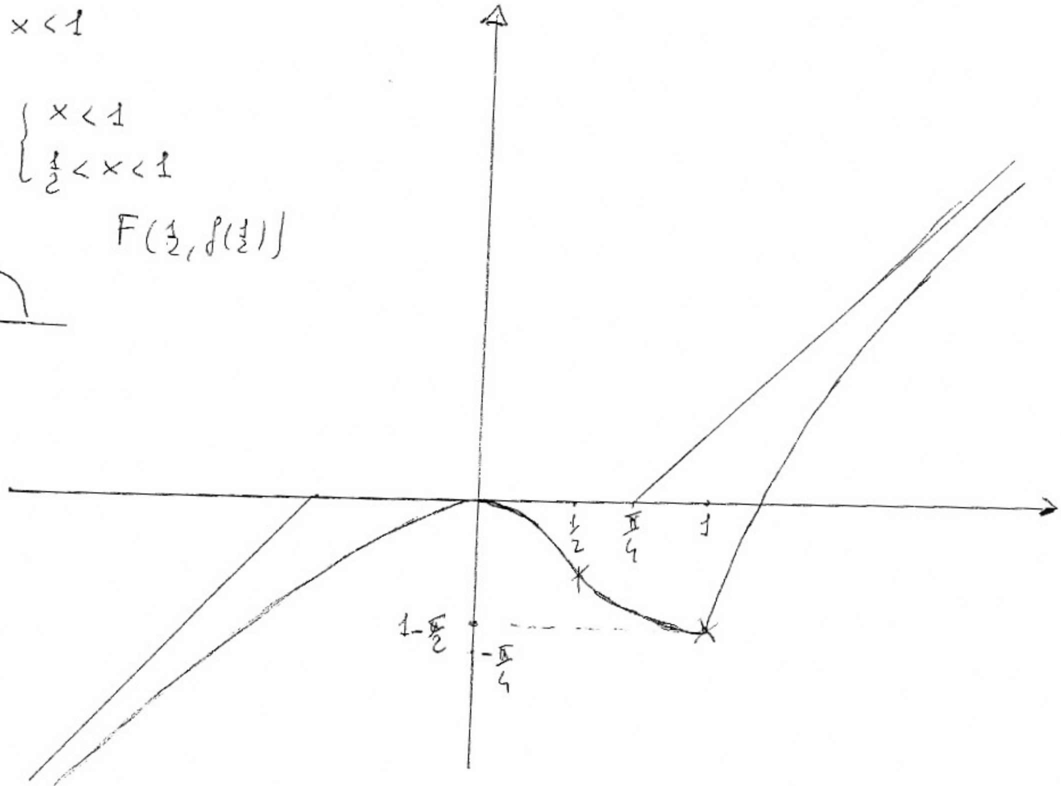
$$y''= \begin{cases} \dfrac{-4x+2}{2x^2-2x+1} & x>1 \\[2ex] \dfrac{4x-2}{2x^2-2x+1} & x<1 \end{cases}$$

$y''>0 \iff \begin{cases} x>1 \\ x<\frac{1}{2} \end{cases} \cup \begin{cases} x<1 \\ \frac{1}{2}<x<1 \end{cases}$

$\emptyset$

$F(\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2}))$





f è continua e derivabile in ogni pto del suo dominio, non è invertibile perché non ingettiva e il suo codominio è $= \mathbb{R}$.

2. f è integrabile in $]0,1]$ essendo $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0$

in quanto prodotto di funzione infinitesima per funzione limitata;

non lo è in $[1,+\infty)$ essendo $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 0$ con ordine 1

in quanto $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = 0$ con ord 1 e $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1$

3. $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 + \lg(1-x)}{\operatorname{tg} x - x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - \frac{1}{1-x}}{\frac{1}{\cos^2 x} - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x(1-x)-1}{\operatorname{sen}^2 x} \cdot \underbrace{\frac{\cos^2 x}{1-x}}_{\to 1}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x(1-x) - e^x}{2\operatorname{sen} x \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{-x e^x}{2 \operatorname{sen} x \cos x} = -\frac{1}{2}$$

$\frac{x}{\operatorname{sen} x} \to 1$

4. Poichè $\operatorname{sen} x \sim x$ $\quad 1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$, $\quad \operatorname{arctg}^2 x \sim x^2$, $\quad 2^{x^2}-1 \sim (\lg 2)x^2$

il limite diventa $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x \cdot \frac{x^2}{2}}{x^2 + (\lg 2)x^2} = 0$

5. Poichè $$\sqrt{\frac{1+i}{1-i}} = \sqrt{\frac{(1+i)^2}{1-i^2}} = \sqrt{\frac{1+i^2+2i}{2}} = \sqrt{i} = \left\{ \cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2} \,\middle|\, k=0,1 \right\}$$
$$= \pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

bisogna risolvere le equazioni $|\omega|^2 + \overline{\omega} + i = \pm\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$$\iff |\omega|^2 + \overline{\omega} + i = \pm 1 \pm i \quad \begin{cases} |\omega|^2 + \overline{\omega} = 1 & (1) \\ |\omega|^2 + \overline{\omega} + 2i + 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

(1) $x^2 + y^2 + x - iy = 1 \iff \begin{cases} x^2+y^2+x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ $\quad x^2+x-1=0 \quad x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

(2) $x^2+y^2+x-iy+2i+1 = 0 \iff \begin{cases} x^2+y^2+x+1=0 \\ -y+2=0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x^2+x+5=0 \quad \emptyset \\ y=2 \end{cases}$

Dunque l'equazione ha 2 radici reali $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.