COMPITO DI ISTITUZIONI DI MATEMATICHE I
C.d.L. Chimica - Tecnologie Chimiche
(20/04/2006)

Esercizio 1. Studiare la funzione

$$f(x) = x - \operatorname{arctang}\Big(\frac{|x|}{x-1}\Big)$$

e disegnarne il grafico approssimativo.

Esercizio 2. Dire, giustificando le risposte, se la funzione

$$f(x) = \frac{\operatorname{arctang}(x) + 2 - 2\cos(x)}{e^x - 1 - x}$$

è integrabile negli intervalli $]0,1]$, $[1,+\infty[$.

Esercizio 3. Utilizzando il Teorema di de l'Hopital calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{sen}(x) - \cos(x)}{\log(\operatorname{sen}(x)) - \log(\cos(x))}.$$

Esercizio 4. Usando il principio di sostituzione degli infiniti calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x-2}{x^2+2}\log(3^x + x^2 - 1).$$

Esercizio 5. Data la funzione

$$f(x) = e^{2\operatorname{tang}(x)}\operatorname{arcsen}\big(\sqrt[3]{x^2}\big),$$

scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = 0$.

Esercizio 6. Risolvere la seguente equazione in campo complesso

$$\big(\omega(\omega+i)\big)^2 = i^4.$$

Svolgimento

1. $ID = \mathbb{R} - \{1\}$

$$\lim_{x \to 1^+} x - \operatorname{arctg} \frac{|x|}{x-1} = 1 - \lim_{y \to +\infty} \operatorname{arctg} y = 1 - \frac{\pi}{2}$$

$\nexists$ as. verticali

$$\lim_{x \to 1^-} x - \operatorname{arctg} \frac{|x|}{x-1} = 1 - \lim_{y \to -\infty} \operatorname{arctg} y = 1 + \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} x - \operatorname{arctg} \frac{|x|}{x-1} = \pm\infty \quad \nexists \text{ as. orizz.}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} 1 - \frac{\operatorname{arctg} \frac{|x|}{x-1}}{x} = 1 - 0 = 1 \quad \text{(eventuale coefficiente angolare)}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - mx = \lim_{x \to \pm\infty} - \operatorname{arctg} \frac{\pm x}{x-1} = \mp \frac{\pi}{4} \qquad y = x \mp \frac{\pi}{4} \text{ asintoto obliquo a } \pm\infty$$

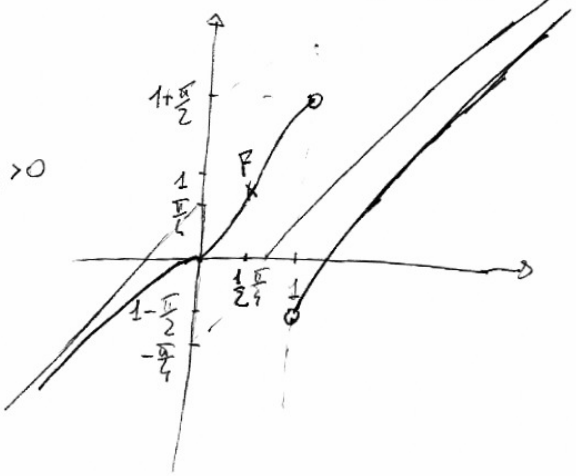
$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ Non studiamo la positività di f.

$$y' = 1 - \frac{1}{1 + \frac{x^2}{(x-1)^2}} \cdot \frac{\frac{x}{|x|}(x-1) - |x|}{(x-1)^2} = 1 - \frac{\cancel{(x-1)^2}}{(x-1)^2 + x^2} \cdot \frac{\cancel{x^2} - x - \cancel{x^2}}{|x| \cancel{(x-1)^2}}$$

$$y' = 1 + \frac{x}{|x|(2x^2 - 2x + 1)} = \begin{cases} 1 + \frac{1}{2x^2 - 2x + 1} & x > 0 \quad x \neq 1 \\ 1 - \frac{1}{2x^2 - 2x + 1} & x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^+} y' = \lim_{x \to 0^+} 1 + \frac{1}{2x^2 - 2x + 1} = 2 \qquad \lim_{x \to 0^-} y' = \lim_{x \to 0^-} 1 - \frac{1}{2x^2 - 2x + 1} = 0$$

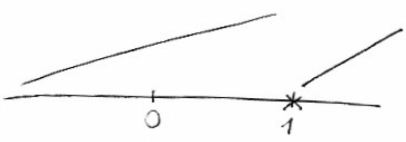
$x = 0$ pto angoloso per f



$$y' > 0 \iff \begin{cases} x > 0 \\ 1 + \frac{1}{2x^2 - 2x + 1} > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2x^2 - 2x + 1} > 0 \end{cases}$$

$$\iff x > 0 \vee \begin{cases} x < 0 \\ 2x^2 - 2x > 0 \\ x < 0 \vee x > 1 \end{cases}$$

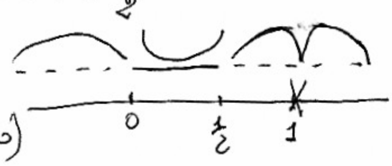
$$\iff \forall x \in ID(f),\ x \neq 0$$



f è str. crescente in $(-\infty, 1[$ e in $]1, +\infty)$.

$$y'' = \begin{cases} \dfrac{-4x+2}{(2x^2-2x+1)^2} & \text{se } x>0,\ x\neq 1 \\[2ex] \dfrac{4x-2}{(2x^2-2x+1)^2} & \text{se } x<0 \end{cases}$$

$$y''>0 \iff \begin{cases} x>0 \\ -4x+2>0 \end{cases} \vee \begin{cases} x<0 \\ 4x-2>0 \end{cases} \iff 0<x<\frac{1}{2}$$



f concava in $(-\infty, 0[$, in $]\frac{1}{2}, 1[$ e in $]1, +\infty)$

f convessa in $]0, \frac{1}{2}[$

2. $$\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{arctg} x + 2(1-\cos x)}{e^x - 1 - x} \underset{\downarrow}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{arctg} x}{\cancel{1}+\cancel{x}+\frac{x^2}{2}+o(x^2)-\cancel{1}-\cancel{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\frac{x^2}{2}} = +\infty$$

trascuro $1-\cos x$ infinitesimo di ordine 2 rispetto a $\operatorname{arctg} x$ di ordine 1

poiché $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ con ordine 1, f non è integrabile in $]0,1]$.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\operatorname{arctg} x + 2 - 2\cos x}{e^x - 1 - x} = 0$$ con ordine comunque grande (al numeratore ho funzione limitata, al denominatore prevale e^x)

$\Rightarrow f$ integrabile in s.i. in $[1, +\infty)$.

3. $$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\lg \operatorname{sen} x - \lg \cos x} = \frac{0}{0} \overset{H}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x + \operatorname{sen} x}{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x + \operatorname{sen} x)\operatorname{sen} x \cos x}{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x} = \sqrt{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

4. I.D. $\begin{cases} -1 \leq \sqrt[3]{x^2} \leq 1 \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$ $\quad -1 \leq x \leq 1$

$$f'(x) = e^{\operatorname{tg} x}\cdot\frac{2}{\cos^2 x}\operatorname{arcsen}\sqrt[3]{x^2} + e^{\operatorname{tg} x}\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt[3]{x^2})^2}}\cdot\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} \quad \forall x\neq 0$$

$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = -\infty \Rightarrow x=0$ pto cuspidale

$x=0$ retta tangente

4. Poiché $\operatorname{ord} 3^x > \operatorname{ord} x^2$ trascurando gli infiniti di ordine minore e le costanti si ha

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x-2}{x^2+2} \lg(3^x + x^2 - 1) = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x}{x^2} \lg 3^x = \lim_{x \to +\infty} \frac{3\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} \lg 3$$

$$= 3 \lg 3.$$

6. $w^2 + w = \sqrt{i^4}$ Poiché $\sqrt{i^4} = \sqrt{1} = \left\{ \cos \frac{0 + 2k\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{0+2k\pi}{2} \quad k = 0, 1 \right\}$

$$= \{1, -1\}$$

$$w^2 + w - 1 = 0 \Rightarrow w_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} = \begin{cases} \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$w^2 + w + 1 = 0 \Rightarrow w_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\Rightarrow$ l'equazione ha 4 radici complesse $\left\{ \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}, -\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$.