COMPITO DI ISTITUZIONI DI MATEMATICHE I
C.d.L. Chimica - Tecnologie Chimiche
(23/02/2006)

Esercizio 1. Studiare la funzione

$$f(x) = |x| + \left|\operatorname{arctang}(x)\right|$$

e disegnarne il grafico approssimativo.

Esercizio 2. Dire, giustificando le risposte, se la funzione

$$f(x) = \frac{x - \operatorname{sen}(x)}{x^4}$$

è integrabile negli intervalli $]0,1]$, $[1,+\infty[$.

Esercizio 3. Utilizzando il Teorema di de l'Hopital calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \log\left(\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}\right).$$

Esercizio 4. Confrontando gli infinitesimi calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\operatorname{sen}(x) - 2\big(1 - \cos(x)\big)}{(1 - x^2)^{\frac{1}{3}} - 1 + \log^2(1 + x)}.$$

Esercizio 5. Data la funzione

$$f(x) = \operatorname{arctang}(x) + \operatorname{arctang}\left(\frac{1}{x}\right),$$

1) scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = 1$;
2) trovare gli estremi relativi di f;
3) giustificare in base alla teoria il risultato trovato.

Esercizio 6. Risolvere la seguente equazione in campo complesso

$$|\omega|^2 + 5\omega + 10i\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{60} = 0.$$

NOTA BENE: coloro che fanno il secondo esonero devono risolvere gli esercizi 1, 2, 3, 4.

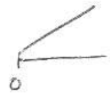
Svolgimento

1. $ID = \mathbb{R}$ $\quad f(-x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ $\quad$ Poiché f è pari, basta studiarla per $x \geq 0$ e togliere perciò i valori assoluti.

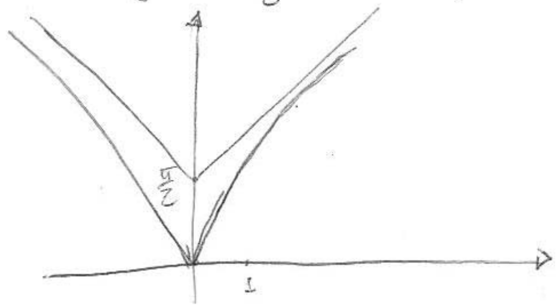
$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ $\quad f(x) \geq 0 \iff \begin{cases} x + \operatorname{arctg} x \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \iff x \geq 0$ $\quad \nexists$ as. verticali

$\lim\limits_{x \to +\infty} x + \operatorname{arctg} x = +\infty$ $\quad \nexists$ as. orizz. $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + \operatorname{arctg} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x \to +\infty} \cancel{x} + \operatorname{arctg} x - \cancel{x} = \dfrac{\pi}{2}$ $\quad y = x + \dfrac{\pi}{2}$ as. obliquo a $+\infty$

$y' = 1 + \dfrac{1}{1+x^2}$ $\quad y' > 0 \quad \forall x > 0$ 

$y'' = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$ $\quad y'' > 0 \quad x > 0$ 



$\lim\limits_{x \to 0^+} y' = 1 + 1 = 2$ $\quad x = 0$ pto angoloso

2. Poiché f è continua in $]0,1]$ e $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x^4} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cancel{x} - \cancel{x} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{5!} + o(x^6)}{x^4} = +\infty$

con ordine 1, f non è integrabile in s.i. in $]0,1]$.

Poiché $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x^4} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^3} = 0$ con ord. 3, f è integ. in s.i. in $[1, +\infty)$

3. $\lim\limits_{x \to 0} \lg \left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} \lg \left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\lg \left(\frac{e^x - 1}{x}\right)}{x} \overset{H}{=}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cancel{x}}{e^x - 1} \cdot \dfrac{e^x \cdot x - e^x + 1}{x^{\cancel{2}}} = \lim\limits_{x \to 0} \underbrace{\dfrac{x}{e^x - 1}}_{\downarrow \, 1} \cdot \underbrace{\dfrac{e^x \cdot x - e^x + 1}{x^2}}_{\downarrow \, 1/2} = \dfrac{1}{2}$

perché $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x \cdot x - e^x + 1}{x^2} \overset{H}{=} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cancel{e^x} + x e^x - \cancel{e^x}}{2x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x}{2} =$

4. Il limite vale 0 perché il numeratore ha ordine 4 e parte principale $-\dfrac{x^4}{6}$ essendo $x \operatorname{sen} x - 2(1 - \cos x) = \cancel{x^2} - \dfrac{x^4}{3!} + o(x^5) - 2(\cancel{1} - \cancel{1} + \dfrac{\cancel{x^2}}{\cancel{2}} - \dfrac{x^4}{4!} + \ldots) = -\dfrac{1}{6} x^4 + o(x^5)$,

Mentre il denominatore ha ordine 2 essendo

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{3}}-1+\lg^2(1+x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-x^2)^{+\frac{1}{3}}-1}{-x^2}(-1) + \left(\frac{\lg(1+x)}{x}\right)^2 - \frac{1}{3}+1 = \frac{2}{3}$$

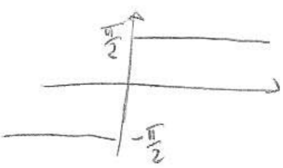
5. $\mathrm{D}f = \mathbb{R}-\{0\}$

$$y' = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{\cancel{x^2}}{1+x^2}\cdot\frac{1}{\cancel{x^2}} = 0 \quad \forall x\neq 0$$

1) Poichè $f'(1)=0$ la retta tangente nel pto $\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$ ha equazione $y=\frac{\pi}{2}$

2) Essendo $f'(x)=0 \quad \forall x\neq 0$ f è costante su $(-\infty,0[$ e su $]0,+\infty)$

$\min\limits_{x\in \mathbb{R}^*} f(x) = -\frac{\pi}{2}$, $\max\limits_{x\in \mathbb{R}^*} f(x) = +\frac{\pi}{2}$



3) La funzione è costante su $(-\infty,0[$ e su $]0,+\infty)$ per un corollario del Teorema di Lagrange, ma non è costante su tutto il suo dominio, che non è un intervallo.

6. Poichè $\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{60} = \left(\cos\frac{\pi}{3}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3}\right)^{60} = \cos 20\pi + i\,\mathrm{sen}\,20\pi = 1$

l'eq. diventa

$|w|^2+5w+10i=0$ Posto $w=x+iy$ si ha

$$\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2+5x+5iy+10i=0 \iff \begin{cases}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2+5x=0\\ 5y+10=0\end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y=-2\\ x^2+4+5x=0\end{cases} \qquad x_{1,2} = \frac{-5\pm 3}{2} = \left\langle \begin{matrix}-2\\-1\end{matrix}\right. \qquad \begin{matrix} w_1=-2-2i\\ w_2=-1-2i\end{matrix}$$