

ESONERO DI ISTITUZIONI DI MATEMATICHE I
C.d.L. Chimica - Tecnologie Chimiche
(09/01/2006)

Esercizio 1. Calcolare il dominio della seguente funzione

$$f(x) = \sqrt{\frac{\arcsen\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x^2 - 1} + x}}.$$

Esercizio 2. Calcolare gli asintoti delle seguenti funzioni

$$f(x) = \frac{|x|^7}{(x^2 - 1)^3}, \quad f(x) = e^{\frac{1}{x}} \arctang(x).$$

Esercizio 3. Studiare la continuità della seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} (1 + \sen(x))^{\frac{1}{x}}, & \text{se } x > 0, \\ \frac{1}{4}, & \text{se } x = 0, \\ \frac{1 - (1 - \arctg^2(x))^{\frac{1}{4}}}{\log(1 + x^2)}, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Esercizio 4. Data la funzione

$$f(x) = e^x \arctg(x^2),$$

- 1) calcolare la derivata di f ;
- 2) scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = 1$.

Esercizio 5. Risolvere la seguente equazione in campo complesso

$$i\omega^2 + 2\omega - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{16} = 0.$$

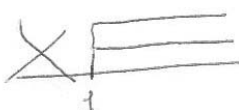
Svolgimento esercizio del 9/1/06

1. $\frac{\arcsen \frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x^2-1} + x} \geq 0$ Studio il dominio di questa frazione e applico la regola del segno

$$\begin{cases} -1 \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \leq 1 \\ x^2 - 1 \geq 0 \\ \sqrt{x^2-1} + x \neq 0 \end{cases} \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -1 \vee x \geq 1 \\ x^2 - 1 \neq x^2 \text{ con } x \leq 0 \end{cases} \quad ID = [1, +\infty)$$

$N \geq 0 \quad \arcsen \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \leq 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 1$

$D > 0 \quad \sqrt{x^2-1} > -x \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-1 \geq 0 \\ -x < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} -x \geq 0 \\ x^2-1 > x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \vee x \geq 1 \\ x > 0 \end{cases} \vee \emptyset$

Dunque  $ID(f) = [1, +\infty)$

2. i) $f(x) = \frac{|x|^7}{(x^2-1)^3}$ $ID = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$ Poiché $|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$
 $x^2-1 > 0 \Leftrightarrow x < -1 \vee x > 1$

segue: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^7}{(x^2-1)^3} = \frac{1}{0^-} = -\infty$ $x = 1$ A.V.

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^7}{(x^2-1)^3} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(-x)^7}{(x^2-1)^3} = \frac{1}{0^+} = +\infty$ $x = -1$ A.V.

$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(-x)^7}{(x^2-1)^3} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^7}{(x^2-1)^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^7}{x^6} = +\infty$ Asintota obliqua

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^7}{(x^2-1)^3 x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^7}{x^7} = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^7}{(x^2-1)^3} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^7 - x(x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1)}{(x^2-1)^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5}{x^6} = 0$

$y = x$ as. obliqua a $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(-x)^2}{(x^2-1)^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^4}{x^6} = +\infty \quad \text{As. obliq. a } -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(-x)^2}{(x^2-1)^3 x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^3}{x^7} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(-x)^2}{(x^2-1)^3} + x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^3 + x^5 - 3x^3 + 3x^3 - x}{x^6} = 0$$

$y = -x$ as. obliquo a $-\infty$

ii) $f(x) = e^{\frac{1}{x}} \arctg x \quad \text{ID} = \mathbb{R}^*$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} \arctg x = 0 \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} \arctg x = +\infty \cdot 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} \cdot x \cdot \frac{\arctg x}{x} \xrightarrow{0} +\infty \quad \begin{matrix} x=0 \text{ as. vert.} \\ \text{da destra} \end{matrix}$$

perché $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} \cdot x = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y} = +\infty$ per gli ordini
 $\frac{1}{x} = y$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{\frac{1}{x}} \arctg x = 1 \cdot \left(\pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm \frac{\pi}{2} \quad y = \pm \frac{\pi}{2} \text{ as. orizz. a } \pm\infty$$

3. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \sin x)^{\frac{1}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[(1 + \sin x)^{\frac{1}{\sin x}} \right]^{\frac{\sin x}{x}} = e$

perché $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \sin x)^{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{y \rightarrow 0^+} (1 + y)^{\frac{1}{y}} = e, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - (1 - \arctg^2 x)^{\frac{1}{4}}}{\lg(1+x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(1 - \arctg^2 x)^{\frac{1}{4}} - 1}{-\arctg^2 x} \cdot \frac{\arctg^2 x}{x^2} \cdot \frac{x^2}{\lg(1+x^2)} = \frac{1}{4}$$

perché $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \arctg^2 x)^{\frac{1}{4}} - 1}{-\arctg^2 x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(1 + y)^{\frac{1}{4}} - 1}{y} = \frac{1}{4}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg^2 x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arctg x}{x} \right)^2 = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\lg(1+x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\lg(1+x^2)}{x^2}} = 1$$

Perché $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{1}{4} = f(0) \neq e = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

La funzione ha in $x_0 = 0$ una discontinuità di 1^a specie ed è continua solo a sinistra.

4. i) $f'(x) = e^x \arctan x^2 + e^x \cdot \frac{1}{1+x^4} \cdot 2x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ 3.

ii) $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \quad f(1) = e \arctan 1 = \frac{\pi}{4} e$

$$f'(1) = \frac{\pi}{4} e + e = \left(\frac{\pi}{4} + 1\right)e$$

$$y - \frac{\pi}{4} e = \left(\frac{\pi}{4} + 1\right)e(x - 1)$$

$$y = \frac{\pi}{4} ex + ex - \frac{\pi}{4} e + \frac{\pi}{4} e$$

eq. retta tangente a f in $(1, \frac{\pi}{4}e)$: $y = \left(\frac{\pi}{4} + 1\right)ex - 1$

5. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{16} = \left[1 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right]^{16} = \cos\left(-16 \cdot \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-16 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = 1$

$$i\omega^2 + 2\omega - 1 = 0 \quad \omega_{\pm} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+i}}{i}$$

$$\sqrt{1+i} = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{2} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{2}\right) \quad k=0,1$$

$$= \pm \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8}\right) = \pm \sqrt[4]{2} \left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} + i \sqrt{\frac{1-\sqrt{2}}{2}}\right)$$

$$\cos \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1+\cos \frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}$$

$$\sin \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1-\cos \frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}$$

$$\omega_{\pm} = \frac{-1 \pm \sqrt[4]{2} \left(\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} + i \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}\right)}{i^2} \cdot i = i \mp \frac{\sqrt[4]{2}}{2} \left(\sqrt{2+\sqrt{2}} + i \sqrt{2-\sqrt{2}}\right)$$

Dunque $\omega_{\pm} = \mp \frac{\sqrt[4]{2}}{2} \left(\sqrt{2+\sqrt{2}} + i \sqrt{2-\sqrt{2}}\right) + i$ e $\omega_{\pm} = \mp \frac{\sqrt[4]{2}}{2} \left(\sqrt{2+\sqrt{2}} + i \sqrt{2-\sqrt{2}}\right)$

$$\omega_{\pm} = \mp \frac{\sqrt[4]{2}}{2} \left(\sqrt{2+\sqrt{2}} + i \sqrt{2-\sqrt{2}}\right)$$