

# Esame di *Calcolo delle Probabilità e Statistica* (Informatica)

Università degli studi di Bari Aldo Moro

Docenti: Simone Del Vecchio, Stefano Rossi

25-01-2023

**Esercizio 1.** Una moneta equilibrata viene lanciata  $N$  volte, dove  $N$  è una variabile aleatoria di Poisson di parametro  $\lambda$ . Dette  $X$  e  $Y$  le variabili aleatorie che contano rispettivamente il numero di teste e di croci ottenute, calcolare:

- (1) il valore atteso e la varianza della variabile aleatoria  $\frac{1}{4}(X + Y)$ ;
- (2) la probabilità che esca testa almeno una volta, cioè  $P(X \geq 1)$   
(Suggerimento: ricordare che  $e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ );
- (3) la probabilità che la moneta sia stata lanciata  $k$  volte, sapendo che non è mai uscita testa  $P(N = k | X = 0)$ ;
- (4) la probabilità che non esca mai testa, sapendo che non è mai uscita croce  $P(X = 0 | Y = 0)$ .

**Esercizio 2.** Per ogni valore del parametro  $\lambda > 0$ , si consideri la funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  data da

$$f(x) := \lambda e^{-2\lambda|x|}$$

per  $x \in \mathbb{R}$ .

- (1) Verificare che  $f$  è la densità di una certa variabile aleatoria  $X$ .
- (2) Determinare lo stimatore di massima verosimiglianza di  $\lambda$  relativo al campione  $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  di rango  $n$  distribuito come  $X$ .
- (3) Determinare la legge di  $|X|$  e dire se si tratta di una legge notevole.
- (4) Determinare la legge della variabile aleatoria

$$Y_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i|$$

e studiare la convergenza in probabilità di  $Y_n$  per  $n$  tendente ad infinito.

**Esercizio 3.** In un corso di dattilografia ci sono 9 studenti mancini e 16 studenti destri. In un test di velocità di battitura, si registra che gli studenti mancini digitano in media 59,3 parole al minuto, con una deviazione standard campionaria di 4,3 mentre gli studenti destri digitano in media 55,7 parole al minuto, con una deviazione standard campionaria di 5,7.

Usare questi dati per verificare, ad un livello di significatività del 5%, l'ipotesi che l'essere mancini o destri non ha alcuna influenza sulla velocità di battitura, supponendo che le varianze associate alle due popolazioni siano le stesse.