

Esame di *Calcolo delle Probabilità e Statistica* (per studenti di
Informatica)

Università degli studi di Bari Aldo Moro
Docenti: Simone Del Vecchio, Stefano Rossi

23-02-2023

Esercizio 1. Un componente elettronico è composto da n elementi in serie*, ciascuno dei quali ha un tempo di vita che segue una legge esponenziale di media 2 giorni. Siano X e X_i , con $i \in \{1, \dots, n\}$, rispettivamente i tempi di vita del componente elettronico e dell' i -esimo elemento.

- (1) Scrivere esplicitamente la densità della variabile aleatoria X_1 .
- (2) Determinare la legge del tempo di vita del componente elettronico e la sua media $E(X)$.
- (3) Determinare la legge della variabile aleatoria $\bar{X} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ e il suo valore atteso $E(\bar{X})$.
- (4) Se viene invece costruito un nuovo componente elettronico formato da n elementi in parallelo**, qual'è la legge del tempo di vita del nuovo componente?

* ovvero il componente elettronico funziona fintanto che tutti gli n elementi sono funzionanti.

** ovvero il componente elettronico funziona fintanto che almeno uno degli n elementi è funzionante.

Esercizio 2. Per ogni valore del parametro $\tau > 0$, si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$f(x) := \frac{1}{\tau} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\tau^2}} \chi_{(-\infty, 0)}(x)$$

per $x \in \mathbb{R}$, dove $\chi_{(-\infty, 0)}$ è la funzione caratteristica dell'intervallo $(-\infty, 0)$.

- (1) Verificare che f è la densità di una certa variabile aleatoria X .
- (2) Mostrare che $E(X) < 0$ (senza calcolarla esplicitamente).
- (3) Determinare lo stimatore di massima verosimiglianza di τ relativo al campione $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ di rango n distribuito come X .
- (4) Determinare la legge di X^2 quando $\tau = 1$ e dire se si tratta di una legge notevole.
- (5) Determinare la legge della variabile aleatoria

$$Y := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2.$$

Esercizio 3. Un segnale di valore μ viene trasmesso da una sorgente e raccolto dal ricevente con un rumore normale di media nulla e varianza σ^2 non nota. Per ridurre il rumore viene inviato 5 volte lo stesso segnale: la media campionaria registrata è $\bar{X} = 9,5$ con varianza campionaria $S^2 = 4$. Si verifichi l'ipotesi che il valore del segnale inviato sia pari a 8 con un livello di significatività del 5%.