

# Esame di *Calcolo delle Probabilità e Statistica* (per studenti di Informatica)

Università degli studi di Bari Aldo Moro

Docenti: Simone Del Vecchio, Stefano Rossi

23-02-2023

**Esercizio 1.** Un componente elettronico è composto da  $n$  elementi in serie\*, ciascuno dei quali ha un tempo di vita che segue una legge esponenziale di media 2 giorni. Siano  $X$  e  $X_i$ , con  $i \in \{1, \dots, n\}$ , rispettivamente i tempi di vita del componente elettronico e dell' $i$ -esimo elemento.

- (1) Scrivere esplicitamente la densità della variabile aleatoria  $X_1$ .
- (2) Determinare la legge del tempo di vita del componente elettronico e la sua media  $E(X)$ .
- (3) Determinare la legge della variabile aleatoria  $\bar{X} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  e il suo valore atteso  $E(\bar{X})$ .
- (4) Se viene invece costruito un nuovo componente elettronico formato da  $n$  elementi in parallelo\*\*, qual'è la legge del tempo di vita del nuovo componente?

\* ovvero il componente elettronico funziona fintanto che tutti gli  $n$  elementi sono funzionanti.

\*\* ovvero il componente elettronico funziona fintanto che almeno uno degli  $n$  elementi è funzionante.

**Esercizio 2.** Per ogni valore del parametro  $\tau > 0$ , si consideri la funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  data da

$$f(x) := \frac{1}{\tau} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\tau^2}} \chi_{(-\infty, 0)}(x)$$

per  $x \in \mathbb{R}$ , dove  $\chi_{(-\infty, 0)}$  è la funzione caratteristica dell'intervallo  $(-\infty, 0)$ .

- (1) Verificare che  $f$  è la densità di una certa variabile aleatoria  $X$ .
- (2) Mostrare che  $E(X) < 0$  (senza calcolarla esplicitamente).
- (3) Determinare lo stimatore di massima verosimiglianza di  $\tau$  relativo al campione  $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  di rango  $n$  distribuito come  $X$ .
- (4) Determinare la legge di  $X^2$  quando  $\tau = 1$  e dire se si tratta di una legge notevole.
- (5) Determinare la legge della variabile aleatoria

$$Y := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2.$$

**Esercizio 3.** Un segnale di valore  $\mu$  viene trasmesso da una sorgente e raccolto dal ricevente con un rumore normale di media nulla e varianza  $\sigma^2$  non nota. Per ridurre il rumore viene inviato 5 volte lo stesso segnale: la media campionaria registrata è  $\bar{X} = 9,5$  con varianza campionaria  $S^2 = 4$ . Si verifichi l'ipotesi che il valore del segnale inviato sia pari a 8 con un livello di significatività del 5%.