

Esame di *Calcolo delle Probabilità e Statistica* (per studenti di
Informatica)

Università degli studi di Bari Aldo Moro

Docenti: Simone Del Vecchio, Stefano Rossi

08–02–2023

Esercizio 1. Una moneta equilibrata viene lanciata N volte, dove N è una variabile aleatoria geometrica di parametro p . Dette X e Y le variabili aleatorie che contano rispettivamente il numero di teste e di croci ottenute, calcolare:

- (1) il valore atteso e la varianza della variabile aleatoria $\frac{1}{10}(X + Y)$;
- (2) la probabilità che non esca mai testa $P(X = 0)$
(Suggerimento: ricordare che $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{q-1}$ per ogni $q \in \mathbb{R}$ con $|q| < 1$);
- (3) la probabilità che la moneta sia stata lanciata k volte, sapendo che non è mai uscita testa $P(N = k | X = 0)$;
- (4) la probabilità che non esca mai testa, sapendo che non è mai uscita croce $P(X = 0 | Y = 0)$. Dire se X e Y sono variabili indipendenti.

Esercizio 2. Per ogni valore del parametro $\lambda > 0$, si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$f(x) := (\lambda + 1)x^\lambda \chi_{[0,1]}(x)$$

per $x \in \mathbb{R}$.

- (1) Verificare che f è la densità di una certa variabile aleatoria X .
- (2) Determinare lo stimatore di massima verosimiglianza di λ relativo al campione $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ di rango n distribuito come X .
- (3) Determinare la legge di $-\ln X$ e dire se si tratta di una legge notevole.
- (4) Dire se lo stimatore di massima verosimiglianza ottenuto al punto (2) è consistente.

Esercizio 3. L'istituto nazionale di igiene mentale statunitense ha pubblicato un articolo in cui si afferma che circa il 9.5% della popolazione americana soffre di un disturbo depressivo maggiore in un arco di tempo di un anno.

Viene effettuato un sondaggio su 100 cittadini americani di Tulsa, e 7 di loro dichiarano di aver sofferto di un disturbo depressivo nell'ultimo anno. Usare i dati del sondaggio per costruire un intervallo di confidenza con livello di fiducia $1 - \alpha = 0.95$ della proporzione degli abitanti di Tulsa che ha sofferto di tale disturbo nell'ultimo anno.

Dire se con un livello di significatività del 5% si può rifiutare l'ipotesi che la percentuale di cittadini di Tulsa che ha sofferto di depressione nell'ultimo anno sia pari a 9.5%.