

**SISTEMI LINEARI
MATEMATICA E FISICA
(CDS SCIENZE ANIMALI)
A.A. 2025/2026**

VINCENZO C. NARDOZZA

Un'equazione si dice *lineare in n incognite* x_1, \dots, x_n se è del tipo

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = c,$$

dove a_1, a_2, \dots, a_n, c sono numeri reali. Una soluzione di una tale equazione è una n -pla ordinata $(\alpha_1, \dots, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ di numeri reali $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tali che $a_1\alpha_1 + \dots + a_n\alpha_n = c$. E' importante non solo *quali* sono i numeri reali α_i , ma anche *a quale* incognita vengono sostituiti.

Esempio 1. L'equazione $3x - 2y = 3$ è un'equazione lineare in due incognite, x e y (se le incognite sono poche, di solito non si usano i pedici. Nel caso generale, si sarebbe scritta $3x_1 - 2x_2 = 3$). Le soluzioni dell'equazione sono tutte le coppie ordinate (α, β) di numeri reali tali che $3\alpha - 2\beta = 3$. Per esempio, $(1, 0)$ è una soluzione dell'equazione, perchè $3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 = 3$. Si noti che $(0, 1)$, pur avendo le stesse entrate di prima, NON è una soluzione.

Inoltre, la soluzione $(1, 0)$ non è unica: anche $(3, 3)$ è soluzione, e in realtà ce ne sono infinite. Infatti, fissato un qualunque numero $\beta \in \mathbb{R}$, l'equazione (in una sola variabile!) $3x - 2\beta = 3$ ammette sempre una e una sola soluzione, $\alpha = \frac{1}{3}(2\beta + 3)$. Le soluzioni dell'equazione sono in effetti le coppie ordinate

$$\left(\frac{2}{3}\beta + 1, \beta\right), \quad \text{al variare di } \beta \in \mathbb{R}.$$

Geometricamente, le soluzioni possono essere visualizzate come i punti del piano sulla retta di equazione $3x - 2y = 3$. □

Assegnata un'equazione lineare in n incognite, indichiamo con S l'insieme delle sue soluzioni. E' immediato constatare che se almeno uno dei coefficienti a_i è non nullo, l'insieme delle soluzioni S è non vuoto; in realtà, se $n \geq 2$ e almeno due coefficienti sono non nulli, allora S è un insieme infinito.

Con il termine *sistema* di m equazioni lineari in n incognite intendiamo il problema di trovare le soluzioni comuni a m equazioni lineari, ciascuna nelle stesse n incognite: la parola *sistema* sta a significare un *insieme*, nel nostro caso di equazioni lineari. Esplicitamente, date le equazioni lineari

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &= c_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n &= c_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n &= c_m \end{aligned}$$

(notare che nei coefficienti a_{ij} il primo pedice indica il numero dell'equazione, il secondo a quale delle n incognite fa riferimento), se la prima equazione ha insieme delle soluzioni S_1 , la seconda S_2 , \dots , la m -ma S_m , risolvere il sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n & = c_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n & = c_2 \\ & \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n & = c_m \end{cases}$$

vuol dire determinare l'insieme $S := S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_m$. Chiaro che se uno degli S_i è vuoto, allora il sistema non ha soluzioni, ma può capitare che il sistema non abbia soluzioni anche se gli S_i sono tutti non vuoti.

In effetti per un sistema lineare, solo tre casi possono accadere: il sistema non ha soluzioni, il sistema ha una unica soluzione, oppure il sistema ha infinite soluzioni.

Esempio 2. Il sistema lineare

$$\begin{cases} x + y & = 1 \\ x - y & = 2 \end{cases}$$

ha un'unica soluzione, precisamente $(3/2, -1/2)$, cioè $S = \{(3/2, -1/2)\}$. \square

Esempio 3. Il sistema lineare

$$\begin{cases} x + y & = 1 \\ 2x + 2y & = 1 \end{cases}$$

non ha soluzioni, benchè sia la prima equazione che la seconda abbiano ciascuna infinite soluzioni. \square

Esempio 4. Il sistema lineare

$$\begin{cases} x + y & = 1 \\ 2x + 2y & = 4 \end{cases}$$

ha infinite soluzioni, le stesse della singola equazione $x + y = 1$: $S = \{(1 - h, h) \mid h \in \mathbb{R}\}$. \square

Assegnato un sistema lineare di m equazioni in n incognite, tutte le informazioni inerenti il problema sono codificate da una matrice $m \times (n+1)$, cioè una tabella con m righe (una per ciascuna equazione) ed $n+1$ colonne (una per ciascuna incognita, e una aggiuntiva per i termini noti) in cui sono disposti ordinatamente i numeri (i coefficienti e i termini noti) del sistema. Nella forma generica data prima,

$$\mathbf{b} := \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & c_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & c_m \end{array} \right).$$

La matrice così ottenuta è detta *matrice completa del sistema*, e può essere suddivisa nella *matrice dei coefficienti*,

$$\mathbf{a} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

e nella *colonna dei termini noti*,

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}.$$

Esempio 5. Le informazioni del sistema lineare

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_3 = 0 \\ 7x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 3 \\ x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

sono tutte racchiuse nella sua matrice completa

$$\mathbf{b} := \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 7 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{array} \right).$$

La riga verticale segna la separazione tra la matrice \mathbf{a} dei coefficienti, e la colonna \mathbf{c} dei termini noti. Esplicitamente,

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 7 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Nel seguito, [scriveremo sinteticamente](#) $\mathbf{b} = (\mathbf{a}|\mathbf{c})$ per indicare la matrice completa decomposta nella sua matrice dei coefficienti e la colonna dei termini noti. \square

Quindi a ogni assegnato sistema lineare corrisponde una matrice a coefficienti in \mathbb{R} (in genere, non quadrata), e chiaramente vale anche il viceversa: ogni matrice (anche non quadrata) può essere vista come la matrice completa di un sistema lineare.

Osservazione 6. Un sistema (in generale, anche non lineare) può essere interpretato come segue: ogni singola equazione può essere vista come un “vincolo” da soddisfare, per cui può ben accadere che ci sia un vincolo incompatibile con gli altri,

e ciò rende il sistema non risolubile. Per esempio, il sistema

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

è un sistema di due equazioni in due incognite che risulta incompatibile: la prima e la seconda equazione sono in contraddizione tra loro ($2x + y$ non può essere contemporaneamente 0 e 1). Come si capisce, più equazioni si aggiungono, più si rischia che il sistema non sia risolubile, e in questo il numero delle incognite c'entra poco: anche un sistema con una sola incognita può risultare incompatibile!

Per sistemi di piccola taglia (poche equazioni e poche incognite), c'è una certa varietà di tecniche risolutive (per sostituzione, per eliminazione, di Cramer, etc) incontrate nel percorso di scuola secondaria, e che risultano abbastanza efficaci. Queste tecniche elementari sono però ineffettive per sistemi con più di due/tre equazioni: risolvere un sistema con 5 equazioni è un compito abbastanza arduo, se affrontato con questi strumenti di base.

Per affrontare il problema in modo più efficace, la strategia generale è la stessa di quella delle equazioni: passare dal sistema assegnato a sistemi equivalenti ad esso (cioè aventi lo stesso insieme di soluzioni) ma via via più semplici. Fermo restando che per una singola equazione le leggi di equivalenza continuano a valere, vediamo quali sono le trasformazioni che possiamo fare su un sistema garantendo che il nuovo sistema così ottenuto sia equivalente a quello di partenza:

- (1) moltiplicare primo e secondo membro di una equazione per un numero $\alpha \neq 0$. Di fatto, questo è il secondo principio di equivalenza delle equazioni;
- (2) scambiare di posto due equazioni. Infatti, fatto ciò per esempio per le equazioni 1 e 2, le soluzioni del secondo sistema sono $S_2 \cap S_1 \cap \dots \cap S_m$ e, dato che l'intersezione tra insiemi è un'operazione commutativa, $S_2 \cap S_1 \cap \dots = S_1 \cap S_2 \cap \dots = S$, insieme delle soluzioni del sistema originale;
- (3) sommare membro a membro un multiplo secondo $\alpha \in \mathbb{R}$ dell'equazione j all'equazione i : stiamo di fatto applicando il primo principio di equivalenza per le equazioni, anche se la quantità che andiamo a sommare a primo e secondo membro della i -ma equazione è scritta in modo diverso.

Dopo aver effettuato una sequenza finita di queste operazioni, il sistema ottenuto può essere molto diverso dal sistema di partenza, ma di sicuro è ad esso equivalente.

Queste operazioni possono essere efficacemente codificate come operazioni sulle righe della matrice completa \mathbf{b} del sistema, e sono dette *trasformazioni elementari sulle righe di una matrice*. Precisamente,

- (1) $\boxed{\mu_i(\alpha)}$: operazione che sostituisce alla riga i -ma di \mathbf{b} quella ottenuta moltiplicando tutte le entrate di quella riga per il numero $\alpha \neq 0$;
- (2) $\boxed{T_{ij}}$: operazione che scambia tra loro le righe i e j di \mathbf{b} ;
- (3) $\boxed{R_{ij}(\alpha)}$: operazione che altera solo la riga i di \mathbf{b} , sostituendola con la riga ottenuta sommando, posto per posto, l'entrata della riga i -ma di \mathbf{b} al multiplo secondo α della corrispondente entrata sulla riga j -ma di \mathbf{b} .

Esempio 7. Effettuiamo una sequenza di trasformazioni elementari sulle righe di una matrice 3×3 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_{31}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{T_{23}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_2(1/2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{R_{13}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_3(1/2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_{23}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il tipo di matrice al quale vogliamo arrivare dopo aver eseguito una sequenza di trasformazioni elementari è il seguente:

Definizione 8. Una matrice \mathbf{s} si dice in forma normale, o *a scala*, quando sono verificate tutte le seguenti condizioni:

- (1) se una riga di \mathbf{s} è nulla (cioè: tutte le entrate della riga sono 0), anche la riga successiva è nulla;
- (2) ciascuna riga non nulla di \mathbf{s} ha 1 come prima entrata non nulla. Tale entrata è detta il *pivot* della riga;
- (3) un pivot di riga è l'unica entrata non nulla nella sua *colonna*: nella colonna del pivot, sopra e sotto il pivot ci sono solo degli 0;
- (4) muovendosi lungo le righe, i pivot “*scorrono verso destra*”: il pivot della seconda riga è in una colonna a destra di quella del pivot della prima riga, poi il pivot della terza riga si trova in una colonna a destra di quella del pivot della seconda riga, etc.

Esempio 9. La matrice

$$\mathbf{s} := \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è a scala. Ha tre pivot (in rosso), nelle case (1, 2), (2, 4) e (3, 6). \square

In base a quanto detto in precedenza, il seguente risultato è ovvio:

Lemma 10. Sia $\mathbf{b} = (\mathbf{a}|\mathbf{c})$ la matrice completa di un sistema lineare, e sia $\mathbf{s} = (\mathbf{a}'|\mathbf{c}')$ la matrice ottenuta dopo aver effettuato una sequenza di trasformazioni elementari sulla matrice \mathbf{b} . Allora il sistema lineare di matrice completa \mathbf{s} è equivalente a quello di partenza.

Possiamo usare quest'idea per portare il sistema di partenza nella forma più comoda possibile, la cui matrice completa sarà una matrice *in forma normale*. In realtà, ci sono infiniti modi di scegliere una sequenza, ma la cosa importante è che la forma normale a cui si arriva è unica:

Proposizione 11. Se \mathbf{b} è una qualunque matrice, esiste ed è unica una matrice in forma normale \mathbf{s} , ottenibile da \mathbf{b} tramite una sequenza finita di trasformazioni elementari sulle righe. Tale matrice \mathbf{s} si dice *la* forma normale di \mathbf{b} .

Grazie a questa unicità, in particolare il numero dei pivot della forma normale è univocamente determinato, e prende il nome di *rango* della matrice; se \mathbf{b} è la matrice di un sistema, tale numero si chiama anche rango *del sistema*. Generalmente, il

rango di una matrice \mathbf{b} (o del sistema di cui \mathbf{b} è la matrice completa) si indica con $rk(\mathbf{b})$, dove rk è l'abbreviazione della parola inglese *rank*, cioè appunto rango.

Un sistema la cui matrice completa è in forma normale è facile da risolvere:

- il sistema è risolubile \iff nessun pivot cade nella colonna dei termini noti. Infatti, avere un pivot nella colonna dei termini noti vuol dire che la corrispondente equazione è $0 = 1$, che non ha soluzioni;
- se il sistema è risolubile, allora le incognite associate ai pivot sono “inchiodate”, nel senso che sono funzioni lineari delle incognite non associate ai pivot, e quindi qualunque assegnazione di tali incognite “libere” risulta in un valore forzato per le incognite “inchiodate”;
- se il sistema ha n equazioni, e rango k , cioè vuol dire che ci sono $n - k$ incognite libere di variare come si vuole, e per ciascuna assegnazione si ha una soluzione del sistema. Il numero $n - k$ si dice perciò il *grado di libertà* del sistema, e con abuso di notazione si suole dire che il sistema assegnato ha ∞^{n-k} soluzioni.

La tecnica risolutiva che sfrutta queste considerazioni si dice *tecnica di eliminazione di Gauss–Jordan*, e ricapitolando procede attraverso i seguenti passi:

- (1) dal sistema si passa alla sua matrice completa $\mathbf{b} = (\mathbf{a}|\mathbf{c})$
- (2) tramite una sequenza di trasformazioni elementari si arriva alla forma normale $\mathbf{s} = (\mathbf{a}'|\mathbf{c}')$
- (3) se in \mathbf{c}' non compare un pivot, il sistema è risolubile
- (4) se il sistema è risolubile, si passa da \mathbf{s} al sistema di cui è matrice completa, e lo si risolve trattando le $n - rk(\mathbf{s})$ incognite libere come parametri reali, e scrivendo le incognite pivotali come loro funzione lineare
- (5) siccome il sistema finale è equivalente a quello di partenza, le soluzioni così trovate sono anche le soluzioni del sistema originale.

Esercizio 1. (cfr. Esempio 4.15 del libro di testo)

Dire se il seguente sistema

$$\begin{cases} x + 3y + z - w = 1 \\ 3x + 9y + 4z + w = 1 \\ 2x + y + 5z + 2w = 0 \\ y - z - w = 2 \end{cases}$$

è compatibile e, se sì, determinare le sue soluzioni.

Svolgimento Esercizio 1. La matrice dei coefficienti, la colonna dei termini noti e la matrice completa sono rispettivamente

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 9 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{s} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 9 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \end{array} \right)$$

Tramite una sequenza di trasformazioni elementari, arriviamo alla forma normale della matrice completa \mathbf{s} . La sequenza non è unica, il risultato finale sì. Per esempio, visto che nella casa $(1, 1)$ già c'è un pivot, possiamo provvedere ad azzerare le altre entrate della prima colonna: effettuiamo le trasformazioni $R(2, 1, -3)$ e $R(3, 1, -2)$ (non è importante, in questo caso, in quale ordine, visto che operiamo due volte su

due righe diverse con la stessa riga 1), ottenendo

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & -5 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \end{array} \right)$$

Poi, visto che la quarta riga già possiede il suo pivot, possiamo usarlo per azzerare le altre entrate nella colonna 2, tramite le trasformazioni $R(1, 4, -3)$ ed $R(3, 4, 5)$, ottenendo la matrice

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 4 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \end{array} \right).$$

Stavolta è la seconda riga ad avere già il suo pivot, e lo usiamo per azzerare le altre entrate nella sua colonna: effettuiamo le trasformazioni $R(1, 2, -4)$, $R(3, 2, 2)$ ed $R(4, 2, 1)$, ottenendo

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -14 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \end{array} \right).$$

A questo punto, normalizziamo la terza riga per avere un pivot (la prima entrata non nulla deve essere un 1, non un 7) tramite $\mu_3(1/7)$, e otteniamo

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -14 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4/7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \end{array} \right).$$

Infine, usiamo il pivot della terza riga e le $R_{ij}(\alpha)$, come prima, per azzerare le entrate sulla sua colonna, ottenendo la matrice

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -30/7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4/7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -12/7 \end{array} \right).$$

La matrice ottenuta non è in forma normale, perchè andrebbero usate le trasposizioni T_{ij} per disporre i pivot in modo che scorrono verso destra (qui diventa importante l'ordine con il quale effettuiamo gli scambi: fare prima T_{23} e poi T_{34} dà una matrice diversa da quella ottenuta facendo al contrario); tuttavia, non abbiamo nemmeno davvero bisogno di effettuare le trasposizioni. Ciascuna riga ha il suo pivot, nessuno dei quali nella colonna dei termini noti, e possiamo concludere che il sistema è risolubile. Di più: il rango della matrice è 4, e quindi non ci sono incognite libere da mettere a parametro, cioè il sistema ha soluzione unica. Per sapere qual è, possiamo riordinare le righe ottenendo la forma normale

$$\mathbf{s} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -12/7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -30/7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4/7 \end{array} \right),$$

corrispondente al sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 = x = 11 \\ x_2 = y = -12/7 \\ x_3 = z = -30/7 \\ x_4 = w = 4/7 \end{cases}$$

cioè l'insieme delle soluzioni è

$$S = \left\{ \left(11, -\frac{12}{7}, -\frac{30}{7}, \frac{4}{7} \right) \right\}. \square$$

Esercizio 2. (cfr. Esempio 4.17 del libro di testo)

Dire se il seguente sistema

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = -2 \\ -2x_1 + x_2 - 7x_3 + x_4 = -1 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = -7 \end{cases}$$

è compatibile e, se sì, determinare le sue soluzioni.

Svolgimento Esercizio 2. La matrice completa del sistema è

$$\mathbf{b} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 4 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -7 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 5 & 4 & -7 \end{array} \right).$$

Poichè c'è al più un solo pivot per ciascuna riga, già possiamo dire che, poichè ci sono 4 incognite e il rango è al massimo 3, il sistema o non avrà soluzioni oppure avremo infinite soluzioni, dipendenti da almeno un parametro libero. Procediamo sinteticamente con le operazioni elementari e riduciamo la matrice in forma normale:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 4 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -7 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 5 & 4 & -7 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_{21}(1) \\ R_{31}(-2)}} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{R_{32}(-1)} \\ & \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\mu_2(-1/3)} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_{12}(-4)} \\ & \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 11/3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\mu_1(1/2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1/2 & 0 & 11/6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \end{aligned}$$

che è la forma normale della matrice completa del sistema. Torniamo a scrivere il sistema codificato da questa matrice (sistema che è, come sappiamo, equivalente a quello di partenza):

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{11}{6}x_4 = -3 \\ x_3 - \frac{2}{3}x_4 = 1 \end{cases}.$$

Qui abbiamo due incognite libere, x_2 e x_4 , che diventano parametri e variano in tutto \mathbb{R} , e due incognite vincolate, x_1 e x_3 , che sono funzione lineare delle incognite libere. Precisamente, se poniamo $h := x_2$ e $k := x_4$, si ha che $x_1 = \frac{1}{2}h - \frac{11}{6}k - 3$ e $x_3 = \frac{2}{3}k + 1$. Quindi l'insieme delle soluzioni del sistema di partenza è

$$S = \left\{ \left(\frac{1}{2}h - \frac{11}{6}k - 3, h, \frac{2}{3}k + 1, k \right) \mid h, k \in \mathbb{R} \right\}.$$

Sinteticamente, il sistema ha ∞^2 soluzioni. \square

Esercizio 3. (Cfr. Esempio 4.18 del libro di testo)

Dire se il seguente sistema

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = -2 \\ -2x_1 + x_2 - 7x_3 + x_4 = -1 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 7 \end{cases}$$

è compatibile e, se sì, determinare le sue soluzioni.

Svolgimento Esercizio 3. Valgono le stesse considerazioni del sistema precedente: ci sono 3 equazioni in 4 incognite, per cui se il sistema è risolubile ci saranno infinite soluzioni. La matrice completa del sistema è

$$\mathbf{b} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 4 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -7 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 5 & 4 & 7 \end{array} \right).$$

Tuttavia, operando sulle righe, stavolta si ha

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 4 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -7 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 5 & 4 & 7 \end{array} \right) & \xrightarrow{\substack{R_{21}(1) \\ R_{31}(-2)}} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 11 \end{array} \right) \xrightarrow{R_{32}(-1)} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 14 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Questa non è ancora la forma normale del sistema, ma già si vede che nella terza riga comparirà un pivot nella colonna dei termini noti, per cui il sistema non ha soluzioni. \square

Esercizio 4. (cfr. Esempio 4.19 del libro di testo)

Studiare il sistema

$$\begin{cases} tx_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ (t+1)x_1 + 2x_3 = -t \\ -x_1 - x_2 = t+3 \end{cases}$$

al variare del parametro reale t .

Svolgimento Esercizio 4. L'esercizio stavolta NON chiede di determinare se un sistema è risolubile e quali sono le sue soluzioni: abbiamo un sistema che coinvolge un parametro, t , cioè un insieme di sistemi (uno diverso per ciascun valore di t), e dobbiamo distinguere quali di essi sono risolubili e quali no, e tra quelli risolubili *quante* (e non *quali*) sono le soluzioni. Deve essere chiaro che un parametro NON è un'incognita, ma un numero arbitrario che viene di volta in volta assegnato. Qui, perciò, nella matrice completa del sistema comparirà t (che, una volta che sia stata in qualche modo assegnata, svolge il ruolo di numero, non di incognita), e precisamente sarà

$$\left(\begin{array}{ccc|c} t & -1 & 1 & 0 \\ t+1 & 0 & 2 & -t \\ -1 & -1 & 0 & t+3 \end{array} \right).$$

Si procede come sempre con la riduzione a forma normale, sino a che ciò sia lecito:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} t & -1 & 1 & 0 \\ t+1 & 0 & 2 & -t \\ -1 & -1 & 0 & t+3 \end{array} \right) \xrightarrow[R_{23}(t+1)]{R_{13}(t)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -t-1 & 1 & t^2+3t \\ 0 & -t-1 & 2 & t^2+3t+3 \\ -1 & -1 & 0 & t+3 \end{array} \right) \xrightarrow{R_{12}(-1)} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & -t-1 & 2 & t^2+3t+3 \\ -1 & -1 & 0 & t+3 \end{array} \right) \xrightarrow{T_{13}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & t+3 \\ 0 & -t-1 & 2 & t^2+3t+3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array} \right)$$

A questo punto, non c'è problema a far comparire il pivot nella prima riga: basta applicare $\mu_1(-1)$; il problema è far apparire il pivot nella seconda: vorremmo applicare $\mu_2(\frac{1}{-t-1})$, ma per farlo bisogna esser certi che $-t-1 \neq 0$, cioè che $t \neq -1$. Quindi qui dobbiamo distinguere due casi: il caso particolare in cui il parametro t è uguale a -1 , e tutti gli altri.

$t = -1$: il sistema (meglio, la sua matrice) diventa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array} \right)$$

e sia nella seconda che nella terza riga comparirà un pivot; in particolare, il pivot della terza riga cadrà nella colonna dei termini noti, cosicchè il sistema non ha soluzioni. Quindi, in conclusione, se $t = -1$ il sistema NON ha soluzioni.

$t \neq -1$: possiamo continuare a operare come al solito, moltiplicando la seconda riga per $-\frac{1}{t+1}$ e ottenendo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & t+3 \\ 0 & 1 & -2/(t+1) & -(t^2+3t+3)/(t+1) \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array} \right)$$

e la matrice ammetterà 3 pivot, nelle colonne 1, 2 e 3. Questo vuol dire che il sistema è risolubile, e ha una sola soluzione.

Riassumendo: tutti i sistemi sono risolubili e ammettono soluzione unica, eccezion fatta per il sistema in cui il parametro è $t = -1$, nel qual caso il sistema non è risolubile. \square

Esercizio 5. (cfr. Esempio 5.10 del libro di testo)

Piantando dei semi di pomodoro, la temperatura influisce sulla percentuale di semi che germogliano, e sperimentalmente è stato rilevato che a una temperatura di 9° germoglia il 20% di quelli piantati, a una temperatura di 12° germoglia il 40% e a una temperatura di 15° germoglia il 70% di essi. La percentuale di semi che germogliano può dipendere linearmente dalla temperatura? Può dipendere quadraticamente da essa? Se sì, qual è la relazione di dipendenza?

Svolgimento Esercizio 5. Dire che la percentuale p di semi che germogliano dipende linearmente dalla temperatura t vuol dire che $p = p(t) = a_0 + a_1 t$, per certi numeri $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$. Si deve avere, dai dati sperimentali, che $p(9) = 20$, $p(12) = 40$ e $p(15) = 70$, per cui (a_0, a_1) deve essere soluzione del sistema

$$\begin{cases} x_0 + 9x_1 & = 20 \\ x_0 + 12x_1 & = 40 \\ x_0 + 15x_1 & = 70 \end{cases}$$

Andando a normalizzare la sua matrice completa otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 9 & 20 \\ 1 & 12 & 40 \\ 1 & 15 & 70 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_{21}(-1) \\ R_{31}(-1)}} \begin{pmatrix} 1 & 9 & 20 \\ 0 & 3 & 20 \\ 0 & 6 & 50 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_{32}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 9 & 20 \\ 0 & 3 & 20 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Senza bisogno di andare oltre, questa è una matrice dalla quale si potrà produrre un pivot per ciascuna riga; in particolare, la terza riga avrà il suo pivot nella terza colonna, quella dei termini noti. Pertanto, siamo già certi che il sistema non è risolubile, il che vuol dire che la dipendenza di p da t non può essere lineare.

Secondo lo stesso spirito, dire che la dipendenza è quadratica in t vuol dire che $p = p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2$, e sapendo che devono valere $p(9) = 20$, $p(12) = 40$ e $p(15) = 70$, i coefficienti a_0 , a_1 e a_2 devono essere una soluzione del sistema lineare di matrice completa

$$\begin{pmatrix} 1 & 9 & 81 & 20 \\ 1 & 12 & 144 & 40 \\ 1 & 15 & 225 & 70 \end{pmatrix}.$$

La forma normale di questa matrice è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 5/9 \end{pmatrix},$$

matrice di un sistema equivalente a quello di partenza e che ha soluzione unica $(20, -5, 5/9)$, cioè $a_0 = 20$, $a_1 = -5$ e $a_2 = 5/9$. In altri termini, se la dipendenza di p da t è quadratica, essa non può essere altra che la relazione $p(t) = 20 - 5t + \frac{5}{9}t^2$.

□

La risolubilità di un sistema lineare, e il numero delle sue soluzioni, è caratterizzato in termini classici dal seguente

Teorema 12. (Teorema di Rouchè-Capelli)

Un sistema lineare è risolubile se e solo se il rango della matrice completa del sistema uguaglia quello della matrice dei coefficienti. In tal caso, se n è il numero delle incognite e k è il rango, le soluzioni del sistema dipendono da $n - k$ parametri liberi.

Questo enunciato esprime in forma diversa ma equivalente quanto già osservato: il punto centrale è che se $\mathbf{b} = (\mathbf{a} \mid \mathbf{c})$ è, al solito, la matrice completa del sistema, e $\mathbf{s} = (\mathbf{a}' \mid \mathbf{c}')$ la sua forma normale, dire che il rango di \mathbf{b} è uguale al rango di \mathbf{a} vuol dire precisamente che i pivot di \mathbf{s} cadono tutti in \mathbf{a}' , per cui nessuno cade in \mathbf{c}' . Tuttavia, ripetiamo, il precedente enunciato è un risultato classico, e ben evidenzia come la risolubilità di un sistema non dipenda davvero dal numero di incognite o dal numero di equazioni, bensì da come le equazioni sono compatibili tra loro. Inoltre, se tali sono, ogni equazione essenziale (quelle che fanno nascere i pivot) abbassa di 1 il numero di gradi di libertà (il numero delle incognite) del sistema. E' un modo molto suggestivo e chiaro di visualizzare la risolubilità di un sistema lineare e come sono strutturate le sue soluzioni (tema che andrebbe approfondito, e che è trattato sul libro di testo, ma che per brevità non possiamo trattare estesamente).