

NUMERI

(V. 1.0)

VINCENZO C. NARDOZZA

INDICE

1. Numeri naturali	1
2. Numeri interi	2
3. Numeri razionali	3
4. Numeri reali	7

1. NUMERI NATURALI

I numeri $0, 1, 2, 3, \dots$ sono detti numeri **naturali**, e costituiscono un insieme denotato da $\mathbb{N}$. La scrittura $a \in \mathbb{N}$ vorrà dire che *a è un numero naturale*, mentre $a \notin \mathbb{N}$ indicherà che a NON è un numero naturale.

Le operazioni (addizione e moltiplicazione) definite tra i numeri naturali sono ben note, e soddisfano le seguenti proprietà di base:

- proprietà associativa: se $a, b, c \in \mathbb{N}$ allora $(a + b) + c = a + (b + c)$ e $(ab)c = a(bc)$
- proprietà commutativa: se $a, b \in \mathbb{N}$ allora $a + b = b + a$ e $ab = ba$
- esistenza di un elemento neutro: per ogni $a \in \mathbb{N}$ risulta $0 + a = a$ e $1 \cdot a = a$ (cioè: 0 è l'elemento neutro per l'addizione, 1 l'elemento neutro per la moltiplicazione)
- proprietà distributiva: se $a, b, c \in \mathbb{N}$ allora $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
- proprietà di annullamento del prodotto se $a, b \in \mathbb{N}$ e risulta $ab = 0$ allora $a = 0$ oppure $b = 0$. In modo equivalente, si può dire che se $a, b \neq 0$ allora $ab \neq 0$.

Il problema inverso della addizione si chiama *sottrazione*:

se $a, b \in \mathbb{N}$, con la scrittura $a - b$ indichiamo il problema di determinare un numero $c \in \mathbb{N}$ tale che $b + c = a$. Se esiste una soluzione, essa è unica, e scriviamo $a - b = c$; c è detto la *differenza* tra a e b (in quest'ordine). Non sempre però esiste una soluzione: per esempio, il problema $2 - 3$ non ne ammette, mentre $3 - 2 = 1$.

Il problema inverso della moltiplicazione si chiama *divisione*:

se $a, b \in \mathbb{N}$, con la scrittura $a : b$ indichiamo il problema di determinare un numero $c \in \mathbb{N}$ tale che $bc = a$. Se esiste una soluzione, essa è unica, e scriviamo $a : b = c$; c è detto il *quoziente* tra a e b (in quest'ordine). Non sempre però esiste una soluzione: per esempio, il problema $2 : 3$ non ne ammette, come pure non ne ammette $3 : 2$.

Se la divisione $a : d$ è possibile, si dice che a è un *multiplo di d* , o che d è un *divisore* di a , e si scrive sinteticamente $d \mid a$ per dire che d divide a .

Esempio 1.1. Scriviamo $4 \mid 12$ per dire che 4 **divide** 12, cioè che 4 è un divisore di 12, ovvero che 12 è un multiplo di 4. Infatti la divisione $12 : 4$ ammette soluzione, perchè $4 \cdot 3 = 12$.

Definizione 1.2. Un numero $p \in \mathbb{N}$ si dice un *primo* se ogni volta che p divide un prodotto, necessariamente divide uno dei fattori.

Esempio 1.3. Il numero 3 è un primo, perchè se divide un prodotto ab allora necessariamente o 3 divide a (in modo equivalente, o a è un *multiplo di 3*) oppure 3 divide b (cioè: b è un multiplo di 3).

Invece 4 non è un primo, perchè per esempio divide $12 = 6 \cdot 2$, ma non divide nè 6 nè 2.

Teorema 1.4. *Esistono infiniti numeri naturali primi.*

Teorema 1.5. (Teorema di fattorizzazione unica)

Ogni numero naturale ≥ 2 si esprime in modo unico come prodotto di numeri primi, a meno dell'ordine con cui vengono scritti i fattori.

Per esempio, il numero 12 si fattorizza come $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$, e gli unici modi per scriverlo diversamente come prodotto di primi sono $12 = 2 \cdot 3 \cdot 2 = 3 \cdot 2 \cdot 2$.

Naturalmente, si preferisce esprimere il prodotto di più fattori uguali scrivendolo come potenza del fattore, per cui $12 = 2^2 \cdot 3$ è una scrittura più comune.

2. NUMERI INTERI

I numeri $0, +1, -1, +2, -2, \dots$, formati attribuendo un segno $+$ o $-$ a un numero naturale, sono detti numeri **interi**, e formano un insieme denotato con $\mathbb{Z}$. Anche tra numeri interi sono definite due operazioni, $+$ e $\cdot$, ben note dalle scuole secondarie inferiori, che godono delle stesse proprietà già elencate per i numeri naturali: proprietà associativa, commutativa, distributiva, di annullamento del prodotto e esistenza dell'elemento neutro.

E' prassi considerare un numero naturale come un intero con segno $+$; per esempio, si scrive direttamente 1 (numero naturale) identificandolo con il numero $+1$ (numero intero). E' però notevole che i due problemi inversi (differenza e divisione) possono essere trattati in modo significativamente diverso che in $\mathbb{N}$:

Definizione 2.1. Se $a \in \mathbb{Z}$, si dice **opposto di a** il numero intero che sommato con a dà 0 (elemento neutro dell'addizione).

Per esempio, il numero $a = +1$ ha come opposto il numero -1 , perchè $(+1) + (-1) = 0$; invece, il numero -1 ha come opposto il numero $+1$. Si ha

Proposizione 2.2. *Ogni numero intero ha un unico opposto. In particolare, il problema della sottrazione ha sempre un'unica soluzione: se $a, b \in \mathbb{Z}$ allora $a - b = a + (-b)$.*

La proposizione dice che la sottrazione $a - b$ si ottiene **sommando ad a l'opposto di b** , e tale soluzione è unica.

Ricordiamo anche la seguente

Definizione 2.3. Se $a \in \mathbb{Z}$, si dice **valore assoluto** di a il numero non negativo

$$|a| := \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0 \\ -a & \text{se } a < 0 \end{cases}.$$

Per esempio, $|+1| = +1$, $|-1| = -(-1) = +1$. Notare che il primo segno $-$ significa **l'opposto del**, mentre il secondo segno $-$ fa parte del numero intero -1 . Quindi $|a|$ è a stesso se a è non negativo, e **l'opposto di a** se a è negativo.

Per ciò che riguarda il problema della divisione, anche tra interi il problema non sempre ha soluzione (per esempio, continua a non averla il problema $5 : 2$), ma c'è un forte sostituto:

Teorema 2.4. (Teorema di divisione euclidea)

Se $a, b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$ allora esistono, e sono **univocamente determinati**, interi $q, r \in \mathbb{Z}$ tali che

- (1) $a = qb + r$
- (2) $0 \leq r < |b|$.

L'intero q si dice il quoziente, e l'intero r il resto, della divisione (euclidea) $a : b$.

Esempio 2.5. Se $a = 26$ e $b = 7$ allora $26 = 3 \cdot 7 + 5$, cioè $q = 3$ e $r = 5$.

Similmente, se $a = 26$ e $b = -7$, si ha $26 = (-3) \cdot (-7) + 5$. Invece, se $a = -26$ e $b = 7$, è vero che $-26 = (-3) \cdot 7 + (-5)$, ma il risultato della divisione NON è $q = -3$ ed $r = -5$, perchè il resto deve, per definizione, essere non negativo e minore di $|b|$, mentre $-5 < 0$. Il risultato corretto della divisione euclidea è perciò $-26 = (-4) \cdot 7 + 2$, cioè $q = -4$ ed $r = 2$.

Una conseguenza molto importante del Teorema di divisione euclidea è nella possibilità di rappresentare i numeri interi in un sistema posizionale di arbitraria base maggiore o uguale a 2. Famoso è quello usato dai calcolatori, dove la base è due e i numeri sono rappresentati come stringhe di bit (1 e 0), ma quello cui siamo abituati è quello decimale, dove la base è dieci e i possibili resti della divisione per dieci sono rappresentati dalle cifre 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Esempio 2.6. Il numero **centoventitrè** viene perciò rappresentato dalla stringa di cifre 123, intendendo con ciò che il numero è ottenuto come $3 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^2$.

In base binaria (due) sarebbe invece rappresentato dalla stringa di bit 1111011, a significare $2^0 + 2^1 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6$. $\square$

In particolare, il problema della divisione tra interi $a : b$ ammette soluzione precisamente se il resto della divisione euclidea è zero e, in tal caso, è unica.

Si estendono ai numeri interi i concetti di *divisibilità* e *divisore*: continueremo a scrivere $b \mid a$ per dire che **b divide a** , ovvero che a è un multiplo di b , intendendo che esiste un intero $q \in \mathbb{Z}$ tale che $a = qb$. Anche la definizione di numero primo resta identica. Va però notato che, a differenza che per i naturali, i primi interi compaiono a coppie: sono primi tanto 2 che il suo opposto -2 , e così via per $+3$ e -3 , etc.

3. NUMERI RAZIONALI

Definizione 3.1. Se $a, b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$, la scrittura $\frac{a}{b}$ si dice una *frazione*, il numero a ne è il *numeratore*, il numero b il *denominatore*. L'insieme di tutte le frazioni tra interi si indica con $\mathbb{Q}$, e i suoi elementi sono detti *numeri razionali*.

Esempio 3.2. I numeri $\frac{1}{2}$, $\frac{-1}{2}$, $\frac{1}{-2}$, $\frac{-1}{-2}$ sono numeri razionali.

Scritture differenti non indicano necessariamente numeri razionali differenti. Precisamente,

Definizione 3.3. Se $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$, essi sono **scritture equivalenti** precisamente se $ad = bc$. In tal caso, scriviamo $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

I numeri interi possono essere visti come numeri razionali, identificando $a \in \mathbb{Z}$ con la frazione $\frac{a}{1} \in \mathbb{Q}$.

Corollario 3.4. Se $a, b, c \in \mathbb{Z}$ e $b, c \neq 0$ allora $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$.

Leggendo la precedente uguaglianza da sinistra a destra otteniamo quello che, di solito, si chiama *semplificare la frazione*; tuttavia, molte volte è utile moltiplicare denominatore e numeratore per lo stesso numero diverso da zero. Se il massimo comun divisore tra numeratore e denominatore di una frazione è 1, la frazione si dice ridotta *ai minimi termini*.

Le operazioni tra interi si estendono alle frazioni come segue:

Definizione 3.5. Se $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ allora si definisce la somma tra frazioni ponendo

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} := \frac{a+d}{b}.$$

Se $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ si definisce il prodotto tra frazioni ponendo

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} := \frac{ac}{bd}.$$

Osservazione 3.6. Si noti che l'addizione è definita operativamente solo quando i sommandi hanno lo stesso denominatore. Se i denominatori sono diversi bisogna prima riscrivere le frazioni in modo che abbiamo lo stesso denominatore (per esempio, il loro prodotto, o il loro minimo comune multiplo), secondo il precedente Corollario.

Per esempio,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}.$$

Il problema non si pone per la moltiplicazione. □

Somma e prodotto di numeri razionali sono ancora numeri razionali, e valgono le stesse proprietà formali delle operazioni tra interi: commutatività, associatività, distributività, esistenza di elemento neutro, legge di annullamento del prodotto. Continua a esser vero che ogni numero razionale ha un *opposto*, cioè un numero razionale che sommato ad esso dà zero. Precisamente, se $q = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, il suo opposto è $-q = \frac{-a}{b}$.

Esempio 3.7. L'opposto della frazione $\frac{2}{-3}$, che si denota con $-\frac{2}{-3}$, è la frazione $\frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$ (verificare!).

Di conseguenza, il problema della sottrazione in $\mathbb{Q}$ si può trattare esattamente come in $\mathbb{Z}$: *sottrarre b da a* vuol dire sommare ad a l'opposto di b .

In più, rispetto ai numeri interi, per i numeri razionali vale la seguente

Proposizione 3.8. Se q è un numero razionale non nullo, esiste un unico *inverso* di q , denotato q^{-1} . Precisamente, se $q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, allora $q^{-1} = \frac{n}{m}$.

Dimostrazione. Dire che q è un numero razionale non nullo vuol dire che esistono $a, b \in \mathbb{Z}$, con $a, b \neq 0$, tali che $q = \frac{a}{b}$. Pertanto, anche la frazione $\frac{n}{m}$ è un numero

razionale, e per come è definita la moltiplicazione, il prodotto di $\frac{m}{n}$ per $\frac{n}{m}$ è precisamente $\frac{mn}{mn} = 1$. Il fatto che l'inverso sia unico segue dalla legge di annullamento del prodotto: se x è tale che $qx = 1$ allora si ha

$$q \frac{n}{m} = 1 = qx \Rightarrow q \frac{n}{m} - qx = 0 \Rightarrow q \left(\frac{n}{m} - x \right) = 0,$$

e poichè $q \neq 0$ deve accadere che $\frac{n}{m} - x = 0$, cioè $x = \frac{n}{m}$ necessariamente. $\square$

Conseguenza di ciò è che in $\mathbb{Q}$ il problema della divisione ha sempre una unica soluzione, nello stesso spirito della sottrazione:

Proposizione 3.9. *Se $p, q \in \mathbb{Q}$ e $q \neq 0$, la divisione $p : q$ ha una unica soluzione, e precisamente essa si ottiene moltiplicando p per l'inverso di q . Cioè: $p : q = pq^{-1}$.*

Si tenga presente la seguente **convenzione**: dato che se $a \in \mathbb{Z}$ allora, visto come elemento di $\mathbb{Q}$ nella forma $a = \frac{a}{1}$, esso ha inverso $a^{-1} = \frac{1}{a}$, si sceglie di convenire di scrivere sempre $q^{-1} = \frac{1}{q}$, anche se $q \notin \mathbb{Z}$. Per esempio, se $q = \frac{3}{4}$, allora scriviamo

$$q^{-1} = \frac{1}{q} = \frac{1}{\frac{3}{4}},$$

anche se sappiamo che $q^{-1} = \frac{4}{3}$. Da ciò il concetto di frazione avente come denominatore (o altre volte, come numeratore) una frazione. Di conseguenza, in generale, avremo

$$\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}.$$

Un'altra osservazione importante è la seguente: benchè introdotto come mero simbolo, la linea di frazione sottintende una divisione (diversa da quella euclidea). Infatti, se $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}$, il numero (razionale!) $\frac{a}{b}$ è tale che $b \cdot \frac{a}{b} = a$. Questo vuol dire che la frazione $\frac{a}{b}$ può essere interpretata come il risultato della divisione (in $\mathbb{Q}$) della divisione $a : b$.

Da questa osservazione, e tenendo presente il fatto che la divisione euclidea garantisce la rappresentabilità dei numeri interi nel sistema posizionale di base dieci, segue che possiamo rappresentare anche i numeri razionali nello stesso sistema, ammettendo di sviluppare il numero secondo le potenze a esponente intero di dieci.

Esempio 3.10. Il numero razionale $\frac{3}{50}$ può essere riscritto come 0,06, dove la virgola, (in alcuni testi, incluso il testo adottato, alla virgola si sostituisce il punto decimale e si scrive 0.06) indica il punto di separazione dove le potenze a esponente **negativo** di dieci intervengono. In parole povere,

$$0,06 = 0 \cdot 10^0 + 0 \cdot 10^{-1} + 6 \cdot 10^{-2} = \frac{0}{1} + \frac{0}{10} + \frac{6}{100}.$$

Tuttavia, non sempre lo **sviluppo decimale** di un numero razionale è così pulito e semplice: può capitare che dopo la virgola ci siano infinite cifre decimali.

Esempio 3.11. $\frac{1}{3} = 0,33333333333333 \dots$, con una sequenza infinita della cifra 3 dopo la virgola.

In effetti, lo sviluppo decimale di un numero razionale è basato sulla divisione euclidea, che a ogni step (a ogni posizione dopo la virgola) produce un quoziente (cifra decimale dello sviluppo del numero) e un resto (il punto di partenza della divisione successiva); dato che ogni resto è necessariamente non negativo e strettamente minore del valore assoluto del divisore, se a un certo punto il resto diventa

zero lo sviluppo decimale si arresta (è per esempio il caso di $\frac{3}{50}$); diversamente, prima o poi ci sarà un resto ripetuto, e da quel punto in poi le divisioni successive si ripeteranno ciclicamente (è il caso di $\frac{1}{3}$: la prima divisione euclidea fornisce quoziente 0 e resto 1, perchè $1 = 0 \cdot 3 + 1$. La seconda divisione fornisce la prima cifra decimale, e nasce dalla divisione $10 = 3 \cdot 3 + 1$, con lo stesso resto della precedente, per cui la divisione successiva sarà di nuovo $10 : 3$, e così via).

Perciò, lo sviluppo decimale di un numero razionale è sempre costituito da una parte intera m , una virgola seguita da una sequenza di cifre non ripetute a (detta *antiperiodo*) e da una sequenza di cifre che si ripete indefinitamente, p , detta *periodo*. E' prassi barrare la sequenza p per evidenziare il periodo.

Esempio 3.12. Lo sviluppo decimale di $1259/990$ è $1,2\overline{71}$. Qui la parte intera è $m = 1$, l'antiperiodo la sequenza di lunghezza 1 data da $a = 2$, e il periodo la sequenza (di lunghezza 2) $p = 71$.

Scriveremo sinteticamente $q = m, a\overline{p}$ per indicare la rappresentazione decimale del numero razionale q . Si ha perciò

Proposizione 3.13. *Lo sviluppo decimale di un numero razionale è o un numero che ha una sequenza finita di cifre decimali, o una sequenza di cifre decimali che diventa periodica.*

Vale però anche il converso: la cosa è facile se ci sono un numero finito di cifre decimali dopo la virgola, meno ovvia nel caso generale. Precisamente, se $q = m, a\overline{p}$ ha parte periodica non banale, allora $q \in \mathbb{Q}$, cioè esiste almeno una coppia di interi $n, d \in \mathbb{Z}$, con $d \neq 0$, tale che n/d ha come sviluppo decimale $m, a\overline{p}$ (in altri termini, tale che $q = n/d$). Precisamente:

Teorema 3.14. (frazione generatrice di un numero razionale)

Se $q = m, a\overline{p}$, una frazione generatrice di q è data da

$$\frac{map - ma}{9^p 0^a}$$

dove *map* è il numero intero rappresentato dalla stringa delle cifre formata da parte intera, antiperiodo e periodo, *ma* quello corrispondente alla stringa di parte intera e antiperiodo, e $9^p 0^a$ vuol dire una stringa di tanti 9 quante sono le cifre del periodo p seguita da una stringa di tanti 0 quante sono le cifre dell'antiperiodo a .

Esempio 3.15.

- (1) se $q = 1,00223$, è immediato riscrivere $q = 100223 \cdot 10^{-5}$, cioè $q = \frac{100223}{100000}$;
- (2) se $q = 1,0022\overline{3}$ allora la frazione generatrice si ottiene scrivendo a numeratore la differenza tra il numero rappresentato dalla stringa 10023 (il numero *map*) e il numero 1002 (il numero *ma*), cioè $100223 - 1002 = 99221$; al denominatore dobbiamo scrivere 99000 (corrispondente a $9^p 0^a$). Perciò, la frazione è

$$q = \frac{99221}{99000}.$$

Si può poi verificare che questa frazione è già ridotta ai minimi termini;

- (3) se dobbiamo effettuare la somma $1,1\overline{3} + 0,12\overline{7}$, non possiamo gestire infinite cifre decimali. Però possiamo ricostruire i numeri come frazioni, ottenendo

(dopo le semplificazioni)

$$\frac{17}{15} + \frac{23}{180} = \frac{227}{180} = 1,26\bar{1}.$$

Osservazione 3.16. E' importante notare che mentre per i numeri interi la rappresentazione nel sistema posizionale è unica, per i numeri razionali la rappresentazione decimale è sempre possibile, ma non è più unica! Cioè, lo stesso numero può essere talvolta scritto in modi diversi.

Come esempio, si pensi al fatto che vale $0,\bar{9} = 1$ (verificare!). □

4. NUMERI REALI

I numeri razionali non esauriscono i numeri di cui abbiamo bisogno: ci sono altri numeri che devono essere presi in considerazione.

Esempio 4.1. Se prendiamo un quadrato di lato unitario, dal Teorema di Pitagora sappiamo che la sua diagonale misura $\sqrt{2}$. Tuttavia, $\sqrt{2}$ NON è un numero razionale: se $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ per certi interi $m, n > 0$, allora elevandolo al quadrato e liberando dal denominatore avremmo $2n^2 = m^2$. Questo vuol dire che il numero 2 compare nella fattorizzazione di m^2 , e quindi deve comparirvi con esponente pari. Invece, nel numero $2n^2$, il numero primo 2 compare con esponente dispari, e ciò contraddice il Teorema di fattorizzazione unica citato in precedenza. Questo è un assurdo, derivato dal fatto che abbiamo supposto che $\sqrt{2}$ fosse razionale. Ne dobbiamo dedurre che $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Il ragionamento appena fatto si può estendere senza difficoltà ai numeri $\sqrt{p}$, per ogni p primo positivo. Ma anche altri numeri irrazionali compaiono facilmente:

Esempio 4.2. La misura della circonferenza di diametro unitario è un numero che di solito si indica con π ; più in generale, il rapporto tra una circonferenza e il suo diametro è il numero π . Il numero π , però, non è un numero razionale. Un altro numero irrazionale importante è il numero di Nepero, indicato con la lettera e .

Va da sé che un numero non razionale non può avere né uno sviluppo decimale finito, né uno sviluppo decimale con una parte periodica (altrimenti sappiamo che sarebbe un numero razionale). Quindi deve essere un numero che necessariamente deve avere una parte decimale non banale in cui ci sono infinite cifre che non hanno alcun carattere di periodicità. Di fatto, quindi, non possiamo rappresentarli esattamente, perché non possiamo continuare ad aggiungere indefinitamente cifre decimali.

Esempio 4.3. Si ha

$$\sqrt{2} = 1,4142135623730950488016887242097 \dots$$

$$\pi = 3,1415926535897932384626433832795 \dots$$

$$e = 2,7182818284590452353602874713527 \dots$$

L'insieme di tutti i numeri razionali E irrazionali costituisce l'insieme dei numeri **reali**, rappresentato con il simbolo $\mathbb{R}$, e sarà da ora in poi l'ambito in cui ci muoveremo. Nulla di diverso rispetto la scuola secondaria: anche lì l'ambito usuale è costituito dai numeri reali.

Quindi, per noi, un numero reale è un numero positivo, nullo o negativo, intero o no, e se non intero con una qualunque sequenza, anche non finita e non periodica, di cifre decimali.

Va detto che questa definizione di *numero reale* è molto grossolana, e c'è una costruzione molto più rigorosa di questi numeri; tuttavia, non è il caso di approfondirla in questa sede.

Le operazioni che avevamo a disposizione per i numeri razionali possono essere *estese* ai numeri reali, e le loro proprietà continuano a essere valide (commutatività, associatività, distributività, esistenza dell'elemento neutro, legge di annullamento del prodotto). Così pure ogni numero reale a ha un opposto, denotato con $-a$, e se $a \neq 0$ allora ha anche un inverso, denotato con a^{-1} o anche con $\frac{1}{a}$. Come $\mathbb{Q}$, anche $\mathbb{R}$ con queste operazioni ha una struttura forte: è un campo.

Inoltre, possiamo visualizzare i reali come i punti di una retta: scelto arbitrariamente un punto sulla retta, con esso rappresentiamo il numero 0; i punti a destra di esso rappresenteranno numeri reali positivi, quelli alla sua sinistra numeri reali negativi, e la collocazione di un numero reale sulla retta corrisponderà alla lunghezza del segmento di estremi lui e il punto 0 rispetto una fissata unità di misura. Stiamo già parlando di numeri reali positivi e negativi, e a causa dell'esistenza degli opposti non ci sono difficoltà a riproporre la definizione di valore assoluto anche per i numeri reali: $|a| = a$ se a è un reale non negativo, mentre $|a|$ è l'opposto di a se a è un reale negativo.

Una proprietà importante dei numeri reali è la seguente:

Proposizione 4.4. *Se a è un arbitrario numero reale positivo e n un arbitrario numero naturale non nullo, esiste un unico numero **reale positivo**, denotato con $\sqrt[n]{a}$, tale che $(\sqrt[n]{a})^n = a$. Tale numero è detto **la radice n -ma** di a .*

Quindi, $\sqrt{2}$ (abbreviazione di $\sqrt[2]{2}$) è il numero reale positivo il cui quadrato è 2, così come $\sqrt[5]{\pi}$ è l'unico numero reale positivo che, elevato alla quinta, dà π . E' vero che se n è pari allora ci sono *due* numeri reali che elevati alla n danno a , ma per definizione $\sqrt[n]{a}$ è quello positivo, e $-\sqrt[n]{a}$ è l'altro.

Osservazione 4.5. Questa proprietà, l'esistenza delle radici n -me, vale per i numeri reali ma non per i numeri razionali, nel senso che per esempio non c'è nessun numero razionale che elevato al quadrato dà 2 (il che vuol dire precisamente $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$).

Il fatto che $(\sqrt[n]{a})^n = a$ permette di estendere il concetto di potenze con esponente intero a quello di potenze con esponente razionale. Ricordiamo infatti le proprietà delle potenze a esponente naturale (con a, b numeri reali **positivi** e $m, n \in \mathbb{N}$):

- (1) $a^m a^n = a^{m+n}$
- (2) $(ab)^m = a^m b^m$
- (3) $(a^m)^n = a^{mn}$
- (4) $a^0 = 1$.

A esse si aggiunge la convenzione di scrivere a^{-1} (l'inverso di a) nella forma $\frac{1}{a}$.

Da ciò, siccome $(\sqrt[n]{a^m})^n = a^m$ per definizione, possiamo applicare la regola formale precedente (di potenza di una potenza) e scrivere $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$. Infatti, $(a^{\frac{m}{n}})^n = a^{\frac{m}{n} \cdot n} = a^m$. Per l'unicità della radice n -ma di un numero reale positivo, si ha che $a^{\frac{m}{n}}$ è precisamente il numero reale cercato.

L'unica cosa da controllare, per evitare di commettere errori brutti, è esser certi che $a > 0$: per esempio, $\sqrt{-1}$ non è un numero reale, dato che nessun numero reale, elevato al quadrato, è negativo; inoltre, 0^0 è, per convenzione, non definito (mentre, per definizione, $a^0 = 1$ se $a \neq 0$).

In effetti, è possibile estendere il concetto di potenza a quello di potenza con esponente *reale*, cioè a^α dove α è un numero reale, ma non è questo il contesto in cui approfondire questa estensione.

Esempio 4.6. $\sqrt[3]{\pi^5} = \pi \sqrt[3]{\pi^2}$, perchè $\pi > 0$ e si ha

$$\sqrt[3]{\pi^5} = \pi^{\frac{5}{3}} = \pi^{1+\frac{2}{3}} = \pi^1 \pi^{\frac{2}{3}} = \pi \sqrt[3]{\pi^2}.$$

Un'altra caratteristica, che scriviamo in dettaglio per i reali ma che continua a valere (ovviamente) anche per i razionali, gli interi e i naturali, è il fatto che oltre alle operazioni c'è una relazione di ordine *totale*, denotata dal simbolo $\leq$, definita su $\mathbb{R}$, che è *compatibile* con le operazioni.

Definizione 4.7. (Relazione di ordine totale su $\mathbb{R}$)

Per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}$ si ha che

- (1) $a \leq a$ (proprietà riflessiva)
- (2) se $a \leq b$ e $b \leq a$ allora $a = b$ (proprietà antisimmetrica)
- (3) se $a \leq b$ e $b \leq c$ allora $a \leq c$ (proprietà transitiva)
- (4) o è vero che $a \leq b$ o è vero che $b \leq a$ (tutti i numeri sono confrontabili).

Il concetto di compatibilità è invece riassunto nelle usuali proprietà delle disuguaglianze:

Proposizione 4.8. (Compatibilità con l'addizione)

Siano a, b, c arbitrari numeri reali. Allora

$$a \leq b \quad a + c \leq b + c.$$

Proposizione 4.9. (Compatibilità con la moltiplicazione)

Siano a, b, c arbitrari numeri reali, e $c \neq 0$. Allora

$$a \leq b \quad \begin{cases} ac \leq bc & \text{se } c > 0 \\ ac \geq bc & \text{se } c < 0 \end{cases}.$$

Da ciò si hanno immediatamente le relazioni che passano tra gli opposti, e gli inversi, di numeri reali assegnati di cui si conosce l'ordinamento reciproco:

Corollario 4.10. Siano a, b numeri reali non nulli, con $a < b$. Allora

- (1) $-a > -b$. In particolare, $a > 0 \iff -a < 0$;
- (2) $a > 0 \iff a^{-1} > 0$;
- (3) Se $a > 0$ o $b < 0$, allora $a^{-1} > b^{-1}$; se invece $a < 0 < b$ allora $a^{-1} < b^{-1}$.

Dimostrazione. Per gli opposti è immediato: basta moltiplicare per $c = -1 < 0$ ambo i membri di $a < b$. Per $b = 0$ si ha la seconda parte. Anche il secondo punto è immediato: poichè $aa^{-1} = 1 > 0$, a e il suo inverso a^{-1} devono essere entrambi positivi o entrambi negativi.

Infine, per il terzo punto, se $a < b < 0$, possiamo moltiplicare per $a^{-1}b^{-1} > 0$ ambo i membri di $a < b$ ottenendo $b^{-1} < a^{-1}$, e lo stesso accade se $0 < a < b$. Invece se a e b stanno da lati opposti rispetto a zero, i loro inversi saranno rispettivamente ancora negativo e positivo. $\square$

Di particolare importanza per noi sarà il confronto tra coppie di numeri di cui conosciamo l'ordinamento relativo:

Proposizione 4.11. Siano a_1, a_2, b_1, b_2 numeri reali, con $a_1 \leq b_1$ e $a_2 \leq b_2$. Allora

- (1) $a_1 + a_2 \leq b_1 + b_2$;
- (2) se $b_1, a_2 > 0$ allora $a_1 a_2 \leq b_1 b_2$.

Dimostrazione. Per il primo punto, sappiamo che $a_1 + a_2 \leq b_1 + a_2$, per la proprietà di compatibilità di $\leq$ con l'addizione. D'altra parte, poichè $a_2 \leq b_2$, per la stessa proprietà sappiamo che $b_1 + a_2 \leq b_1 + b_2$. Per la proprietà transitiva di $\leq$ otteniamo $a_1 + a_2 \leq b_1 + b_2$.

In modo molto simile si procede se sappiamo che $0 < a_2 < b_2$: da $a_1 \leq b_1$ otteniamo subito $a_1 a_2 \leq b_1 a_2$, visto che abbiamo moltiplicato ambo i membri per $a_2 > 0$. Possiamo ripetere il procedimento moltiplicando membro a membro $a_2 \leq b_2$ per $b_1 > 0$, ottenendo $b_1 a_2 \leq b_1 b_2$ e di nuovo, per la proprietà transitiva di $\leq$, otteniamo quanto affermato. $\square$

Osservazione 4.12. E' invece in genere **falso** che $a_1 - a_2 \leq b_1 - b_2$, così come è falso che $a_1 a_2 \leq b_1 b_2$ se una delle due condizioni $b_1 > 0$, $a_2 > 0$ viene meno.

Queste considerazioni generali avranno una veste specifica nel seguito, nell'ipotesi molto più comoda in cui $0 < a \leq b$.