LIMITI

Indice

1. Premessa

C'è una naturale identificazione di $\mathbb{R}$ con la cosiddetta *retta reale*, cioè una retta (ente geometrico) su cui sono fissati

- un'origine O, che identifichiamo con il numero reale 0
- un'unità di misura
- un verso di percorrenza, che idealmente rappresenta l'ordinamento tra numeri reali.

In questa maniera, ogni numero reale si "incarna" in esattamente un punto della retta reale, e viceversa ogni punto sulla retta reale è l'espressione "tangibile" di un numero reale. Per questo motivo è prassi usare i termini *numero reale* e *punto* come sinonimi, anche se un po' strano parlare del "punto 2", e dire che è *minore del punto* π.

D'altra parte, appunto, è una terminologia ormai tradizionale, a cui aderiremo, come fa la quasi totalità dei testi di Matematica.

Un'altra convenzione che useremo è parlare di insieme dei reali ampliato: per comodità espositiva, all'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ vengono aggiunti altri due "punti", denotati con $+\infty$ e $-\infty$, estendendo l'ordinamento in $\mathbb{R}$ con $-\infty < x < +\infty$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. L'insieme dei reali esteso è denotato con $\hat{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Va però ricordato che $+\infty$ e $-\infty$ NON sono numeri reali.

Le operazioni in $\mathbb{R}$ vengono pure estese a $\hat{\mathbb{R}}$, convenendo che $(+\infty)+(+\infty) = +\infty$, $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$, e $+\infty + x = +\infty$, $-\infty + x = -\infty$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. NON è però definito $(+\infty) + (-\infty)$.

Similmente, per ogni $0 < \alpha \in \mathbb{R}$ si conviene che $\alpha\cdot(+\infty) = +\infty$ e $\alpha\cdot(-\infty) = -\infty$, mentre $\alpha \cdot (+\infty) = -\infty$ se $\alpha < 0$, secondo l'usuale regola dei segni. NON è però definito $0 \cdot (+\infty)$, nè $0 \cdot (-\infty)$.

Un termine che useremo spesso è il seguente

Definizione 1.1. Se $x_0 \in \mathbb{R}$, diremo intorno di x_0 un qualunque sottinsieme $I \subseteq \mathbb{R}$ contenente un intervallo aperto a cui x_0 appartiene.

Nella pratica, gli intorni che considereremo saranno in realtà intervalli, precisamente del tipo $I =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, per un certo $\delta > 0$.

***Esempio* 1.2.** Se $x_0 = 0$, l'insieme $\mathbb{R}$ è un intorno di di 0, perchè contiene l'intervallo $]-1,1[$ a cui 0 appartiene. E' altresì chiaro che $\mathbb{R}$ è un intorno di ogni numero reale. Anche gli intervalli $]-1,1[$, $[-1,1[$, $[-1,1]$, $]-1,1]$, $[-2,1]$ sono intorni di 0.

L'insieme $\mathbb{N}$ non è, invece, un intorno di 0: quale che sia $\delta > 0$, non è vero che $]-\delta,\delta[\subseteq \mathbb{N}$. Lo stesso vale per $\mathbb{Z}$ e per $\mathbb{Q}$, anche se 0 è elemento di tutti e tre questi insiemi.

Il termine *intorno*, che al momento è stato dato solo in relazione ai numeri reali, può essere esteso ai punti $\pm\infty$: un intorno di $+\infty$ è un qualunque sottinsieme di $\mathbb{R}$ che contiene un intervallo $]M,+\infty[$, per un certo $0 < M \in \mathbb{R}$; in modo analogo si definisce un intorno di $-\infty$. Perciò, $\mathbb{R}$ è un intorno anche di $+\infty$ e $-\infty$. Anche qui, nella pratica, gli intorni che useremo saranno direttamente intervalli $]M,+\infty[$ o $]-\infty,-M[$, per un certo $0 < M \in \mathbb{R}$.

Osservazione 1.3. Ricordiamo che, se $\delta > 0$, le affermazioni $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ e $|x - x_0| < \delta$ sono tra loro equivalenti. In termini di teoria degli errori, è come dire $x = x_0 \pm \delta$, dove x_0 è il valore stimato di x e δ è l'errore della stima.

Il vantaggio dell'usare la nozione di intorno è che tramite esso è possibile unificare vari casi in un'unica definizione di *limite* di una funzione reale.

2. Limite di una funzione reale

Preliminare al concetto di limite è la

Definizione 2.1. Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $x_0 \in \hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Si dice che x_0 è un punto di accumulazione per A se in ogni intorno di x_0 c'è almeno un punto di A distinto da x_0:

$$\forall I \text{ intorno di } x_0 \ \exists a \in A,\ a \neq x_0,\ a \in I.$$

Nel concreto, è molto pratico immaginare $I =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ se $x_0 \in \mathbb{R}$, o come già detto $I =]M,+\infty[$ (o $]-\infty,-M[$) se $x_0 = +\infty$ (o $x_0 = -\infty$, rispettivamente).

Osservazione 2.2. Dovrebbe essere chiaro che la negazione dell'affermazione *"x_0 è un punto di accumulazione per A"* è

$$\exists I \text{ intorno di } x_0 \text{ tale che } \forall a \in A\,, a \neq x_0 \text{ risulta } a \notin I.$$

***Esempio* 2.3.** Una piccola lista di esempi:

- Se $A = \mathbb{R}$, ogni $x_0 \in \hat{\mathbb{R}}$ è di accumulazione per A. La stessa cosa se $A = \mathbb{Q}$: la cosa è ovvia se $x_0 \in \{+\infty, -\infty\}$, meno ovvia ma ugualmente vera se $x_0 \in \mathbb{R}$, a prescindere da se $x_0 \in \mathbb{Q}$ o no: essenzialmente, ciò dipende dal fatto che tra due arbitrari numeri reali c'è almeno un numero razionale (e quindi, ce ne sono infiniti);
- se $A = \mathbb{Z}$, nessun numero reale è di accumulazione per $\mathbb{Z}$: infatti, se $k \in \mathbb{Z}$, basta prendere $\delta = 1/2$ per constatare che in $]k - 1/2, k + 1/2[$ l'unico elemento di $\mathbb{Z}$ è k e basta. Perciò, $\mathbb{Z}$ ha solo due punti di accumulazione: $-\infty$ e $+\infty$. Chiaro che per $A = \mathbb{N}$, resta solo $+\infty$.
- se A è un intervallo di estremi a, b, tutti i punti dell'intervallo <u>chiuso</u> $[a,b]$ sono di accumulazione per A, a prescindere dall'essere chiuso o meno di A (p.es.: se $A =]a,b[$)

- se A è un insieme finito, allora non ha nessun punto di accumulazione. Per contro, ogni sottinsieme infinito di $\mathbb{R}$ ammette almeno un punto di $\hat{\mathbb{R}}$ che è accumulazione per A.[1]

***Esempio* 2.4.** Se $A = \{\frac{1}{n} \mid 0 < n \in \mathbb{N}\}$, il punto $x_0 := 2$ non è in A, e non è un punto di accumulazione per A. Il punto $x_0 := 1$ è un punto di A, ma non è un punto di accumulazione di A: basta prendere come intorno di 1 quello di ampiezza $\delta = \frac{1}{2}$ e già in $I =]1-\delta, 1+\delta[=]1/2, 3/2[$ l'unico punto di A è 1.

Nemmeno il punto $x_0 := \frac{1}{2}$ è di accumulazione per A, pure se $\frac{1}{2} \in A$ (verificare).

Invece, il punto $x_0 := 0$ non è in A, ma è di accumulazione per A: infatti fissato un arbitrario $\delta > 0$ basta prendere $n > \frac{1}{\delta}$ per avere un punto di A, precisamente $a := \frac{1}{n}$, che è distinto da 0 e che soddisfa $-\delta < a < \delta$. In effetti, 0 è l'unico punto di accumulazione di A.

Si ha, come conseguenza della definizione, la seguente

Proposizione 2.5. *Se x_0 è un punto di accumulazione per l'insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, in ogni intorno di x_0 cadono infiniti punti di A.*

Perchè considerare "punti di accumulazione" di un insieme? In termini molto efficaci, anche se forse un po' imprecisi, la situazione che vogliamo affrontare è la seguente: supponiamo di avere una funzione $f : A \to \mathbb{R}$, e un punto x_0, e vogliamo sapere che valori assume f intorno a x_0. Non stiamo supponendo che $x_0 \in A$, per cui potremmo non poter nemmeno calcolare $f(x_0)$; d'altra parte, in genere pure se $x_0 \in A$ (e quindi possiamo calcolare $f(x_0)$), non è quello che ci interessa: come detto, magari ci serve conoscere cosa accade abbastanza vicino a x_0, dove i valori assunti da f possono essere considerevolmente differenti da $f(x_0)$.

Per esempio, per la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1000 & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

in ogni intorno di 0 la funzione è costante, e vale 1000, ma per $x = 0$ si ha $f(0) = 0$. Chiaro che deve aver senso poter calcolare valori di f vicino a x_0: per questo ci serve che x_0 sia un punto di accumulazione per A! In tal caso, in ogni intorno di x_0 ci saranno infiniti punti in cui la funzione è definita e in cui potremo valutarla, a prescindere da se $f(x_0)$ esiste o no; se poi esiste anche in x_0 (cioè, se x_0 è un punto di A, oltre che esserne di accumulazione) potremo anche vedere se in x_0 la funzione f si comporta in modo "anomalo", oppure se "segue il trend" che ha attorno a x_0.

Tutto questo può, ed è, precisato, nella seguente

Definizione 2.6. Sia $f : A \to \mathbb{R}$, e sia $x_0 \in \hat{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione per A. Si dice che *la funzione ammette limite per x che tende a x_0, e che tale limite è l'elemento $\ell \in \hat{\mathbb{R}}$*, e scriviamo $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$, se

$$\forall J \text{ intorno di } \ell \quad \exists I \text{ intorno di } x_0 \quad \forall x \in A \cap I \quad f(x) \in J.$$

Cioè, se *per ogni intorno di ℓ c'è almeno un intorno di x_0 in cui le immagini della funzione sono in J.*

---

[1] Questa affermazione è in realtà un Corollario di un Teorema famoso, il Teorema di Bolzano–Weierstrass

***Esempio* 2.7.** Sia $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = \frac{x+3}{|x|}$. Ci chiediamo qual è il suo comportamento quando consideriamo valori vicini a 0. Per esempio, potremmo considerare di "avvicinarci" a zero prendendo una sequenza di punti $x_i = 1/10^i$, diciamo per $i = 0, 1, \dots, 14$ (testiamo i valori su 15 punti via via più vicini a 0).

Otteniamo i valori

x	$f(x)$
10^0	4
10^{-1}	31
10^{-2}	301
10^{-3}	3001
10^{-4}	30001
10^{-5}	300001
10^{-6}	3000001
10^{-7}	30000001
10^{-8}	300000001
10^{-9}	3000000001
10^{-10}	30000000001
10^{-11}	300000000001
10^{-12}	3000000000001
10^{-13}	30000000000001
10^{-14}	300000000000001

cioè la funzione cresce, apparentemente indefinitamente. Però non possiamo subito concludere che sia così: potremmo ripetere l'esperimento su più punti, oppure avvicinandoci a zero per altre vie (per esempio, prendendo la sequenza crescente $-1/10^i$ di numeri negativi a partire da $i = 0, 1, \dots, 14$). In linea di principio, potremmo avere risultati diversi. Di fatto, invece, otterremo sempre lo stesso tipo di comportamento, cioè una sequenza di valori che cresce indefinitamente avvicinandoci a zero, indipendentemente da quali e quanti punti sono i punti x selezionati.

In termini informali, perciò, approssimando 0 con valori sempre più piccoli, la funzione assume valori sempre più grandi. E' questo il senso pratico, tangibile, della scrittura

$$\lim_{x\to 0} \frac{x+3}{|x|} = +\infty.$$

In effetti, fissato un qualunque intorno J di $\ell = +\infty$ (cioè: fissato un arbitrario intervallo $J =]M, +\infty[$ con $M > 0$) è possibile determinare un intorno I di 0 (cioè un intervallo $I =]-\delta, \delta[$, per un opportuno $\delta > 0$) tale che per tutti i valori di $I \cap A$ risulti $f(x) \in J$ (per ogni $x \in A$ tale che $-\delta < x < \delta$ risulta $f(x) > M$). Questo andrebbe provato, e non basta effettuare una serie di test per provarlo, ma è vero. $\square$

***Esempio* 2.8.** In termini molto pratici, se $x_0, \ell \in \mathbb{R}$ (togliamo di mezzo, per il momento, i simboli $\pm\infty$), dire che $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ vuol dire che fissato un qualunque margine di errore $\varepsilon > 0$, esiste un opportuno margine d'errore $\delta = \delta_\varepsilon$ (δ dipende da ε!) tale che non appena $\overline{x}$ è un punto di A che approssima x_0 secondo l'errore δ_ε (cioè $\overline{x} = x_0 \pm \delta_\varepsilon$) il corrispondente valore $f(\overline{x})$ approssima ℓ a meno dell'errore ε fissato (cioè, $f(\overline{x}) = \ell \pm \varepsilon$).

Se non vogliamo usare le idee della teoria degli errori, scriveremo la definizione usuale (che si trova in tutti i libri)

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta_\varepsilon > 0 \quad \text{t.c. } \forall x \in A,\ |x - x_0| < \delta \text{ risulta } |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Osservazione 2.9. Naturalmente, dire che *la funzione f non ammette limite ℓ al tendere di x a x_0* vuol dire che o il limite non esiste, oppure non è ℓ. In ambo i casi, ciò si traduce nell'affermazione

$$\exists J \text{ intorno di } \ell \quad \forall I \text{ intorno di } x_0 \quad \exists x \in I \cap A \quad f(x) \notin J.$$

Si noti che in realtà un intorno di $+\infty$ è un "mezzo intorno": per definizione, se I è un intorno di $+\infty$ deve contenere un intervallo, necessariamente del tipo $]M, +\infty[$ per un certo $M > 0$. Possiamo usare questa idea anche per elementi di $\mathbb{R}$: diremo intorno *sinistro* di un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ ogni insieme che contiene un intervallo $]x_0 - \delta, x_0[$, e *destro* ogni insieme che contiene un intervallo $]x_0, x_0 + \delta[$, per un opportuno $\delta > 0$. Di fatto un intorno, così come l'abbiamo definito, è sia un intorno sinistro che destro. Indicheremo con I^+ un intorno destro, e I^- un intorno sinistro; fatto ciò, ha senso definire il limite *sinistro* e *destro*:

Definizione 2.10. La funzione f ammette limite sinistro (o destro) $\ell \in \hat{\mathbb{R}}$ per x tendente a $x_0 \in \mathbb{R}$ se per ogni intorno J di ℓ esiste un opportuno intorno sinistro I^- (o rispettivamente destro I^+) di x_0 tale che per ogni elemento x di A in esso risulti $f(x) \in J$. In tal caso si scrive

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell \qquad \text{o, rispettivamente,} \qquad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell.$$

***Esempio* 2.11.** La funzione $f(x) = 1/x$ è definita in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (è la reciproca della funzione identità), e in 0 il limite, per come è stato definito, non esiste: fissato un arbitrario $M > 0$, quale che sia $\delta > 0$ gli elementi positivi di $]-\delta, \delta[$ avranno immagini positive, quelli negativi avranno immagini negative, di valore assoluto arbitrariamente grande (quindi non saranno tutte in $]M, +\infty[$ nè tutte in $]-\infty, -M[$).

Tuttavia, esistono sia il limite sinistro che destro: come verificheremo a breve,

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Osservazione 2.12. Come fatto generale, se esiste $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \hat{\mathbb{R}}$ allora esistono sia il limite sinistro che quello destro, e coincidono con ℓ; però affinchè si possa parlare di limite (senza specificare il lato) di f per x che tende a x_0, devono esistere sia il limite sinistro che quello destro, e devono coincidere.

***Esempio* 2.13.** *Verificare che* $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x+3}{x} = 4$.

Fissato un arbitrario $\varepsilon > 0$, si tratta di vedere se riusciamo a determinare un certo $\delta > 0$, che certamente dipenderà dal valore ε di partenza, tale che in tutto $]1 - \delta, 1[\cup]1, 1 + \delta[$ le immagini di f siano in $]4 - \varepsilon, 4 + \varepsilon[$. Affinchè ciò accada, bisogna che la x soddisfi il sistema

$$\begin{cases} \frac{x+3}{x} > 4 - \varepsilon \\ \frac{x+3}{x} < 4 + \varepsilon \end{cases}, \text{ che risolto dà } \begin{cases} x < 1 + \frac{\varepsilon}{3-\varepsilon} \\ x > 1 - \frac{\varepsilon}{3+\varepsilon} \end{cases}.$$

Quale che sia $\varepsilon > 0$, è certamente vero che $\frac{\varepsilon}{3-\varepsilon} > \frac{\varepsilon}{3+\varepsilon}$, per cui se prendiamo $\delta = \varepsilon/(3 + \varepsilon)$ siamo certi che per ogni x nell'intervallo $]1 - \delta, 1 + \delta[$ risulta $4 - \varepsilon < f(x) < 4 + \varepsilon$. La verifica è così terminata. $\square$

Può essere in generale molto complicato calcolare il limite di una funzione, o perfino provare che il limite esiste. Tuttavia, in genere le funzioni "utili" sono anche "buone" in quasi tutti i suoi punti. Il concetto di "bontà delle funzione in un punto" ha la seguente formulazione:

Definizione 2.14. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione e sia $x_0 \in A$ un punto di accumulazione di A. Si dice che la funzione è continua in x_0 se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Si dice che f è continua su $B \subseteq A$ se f è continua in tutti i punti di B.

Quindi per la continuità in un punto x_0 devono essere soddisfatte tre condizioni:

(1) x_0 deve essere un punto dell'insieme di definizione, perchè dobbiamo poter calcolare $f(x_0)$;
(2) deve esistere il limite della funzione (quindi, devono esistere sia il limite destro che quello sinistro e devono coincidere) al tendere ad x_0;
(3) il limite della funzione deve coincidere con il valore $f(x_0)$.

***Esempio* 2.15.** La funzione appena vista, $f(x) = \frac{x+3}{x}$, è continua in $x_0 = 1$, dato che il limite esiste e vale appunto $4 = f(1)$.

Perciò, se sappiamo che una funzione è continua su un certo insieme, non abbiamo problemi a calcolarne il limite in tutti i punti di quell'insieme: basta applicare la funzione nel punto che ci interessa.

Nasce perciò la domanda spontanea: com'è fatta una funzione continua? Senza scendere nei dettagli, la continuità di una funzione ammette una interpretazione molto naturale, dalla quale discende il nome stesso del concetto: una funzione è continua su un insieme se la parte del suo grafico relativa a quell'insieme può essere disegnata senza staccare la matita dal foglio.

Da ciò si capisce anche come può essere fatta una funzione che non è continua in un punto: in quel punto o non la si può disegnare (cioè: in quel punto la funzione non è definita) o bisogna staccare la matita dal foglio e fare un salto per continuare il disegno.

Per esempio, la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ è continua su tutto il suo insieme di definizione, perchè l'unico punto in cui bisogna staccare la matita dal foglio nel tracciarne il grafico è in corrispondenza del punto $x_0 = 0$, nel quale la funzione non è definita.

Se invece consideriamo la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x \geqslant 0 \end{cases},$$

si ha una funzione definita su tutto $\mathbb{R}$, continua su quasi tutto il suo dominio tranne che nel punto $x_0 = 0$, dove la funzione fa un salto.

3. Teoremi sui limiti

Per calcolare il limite di una funzione in un punto di $\hat{\mathbb{R}}$ ci sono vari teoremi utili. Li elenchiamo qui di seguito senza darne la dimostrazione, precisando che continuano a valere nella versione destra e sinistra.

Teorema 3.1. *(Teorema di unicità)*
Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \hat{\mathbb{R}}$ *esiste, esso è unico.*

Teorema 3.2. *(Teorema della permanenza del segno)*
Se $\lim_{x\to x_0} = \ell \neq 0$*, intorno a* x_0 *la funzione assume lo stesso segno di* ℓ*.*

Teorema 3.3. *(Teorema del confronto)*
Se intorno x_0 *risulta* $f_1(x) \leqslant f(x) \leqslant f_2(x)$*, e* $\lim_{x\to x_0} f_1(x) = \lim_{x\to x_0} f_2(x) = \ell$*, allora il limite* $\lim_{x\to x_0} f(x)$ *esiste e vale anch'esso* ℓ*.*

Teorema 3.4. *(Teorema del valore assoluto)*
Se f *ha limite* ℓ *per* $x \to x_0$*, allora* $|f|$ *ha limite* $|\ell|$ *per* $x \to x_0$*.*

Teorema 3.5. *(Limite della somma)*
Se f_1, f_2 *hanno limiti* ℓ_1, ℓ_2 *al tendere di* x *a* x_0*, e* $\{\ell_1, \ell_2\} \neq \{+\infty, -\infty\}$*, allora* $f_1 + f_2$ *ha limite* $\ell_1 + \ell_2$ *al tendere di* x *a* x_0*.*

Si noti che il Teorema della somma non si esprime nel caso in cui ℓ_1, ℓ_2 sono infiniti di segno opposto. Per esempio, è vero che per $f_1(x) = x$ e $f_2(x) = -x + 1$ si ha che i limiti sono rispettivamente $+\infty$ e $-\infty$ per $x \to +\infty$, ma la loro somma è la funzione costante di valore 1, e dunque il limite per $x \to +\infty$ è 1.

Teorema 3.6. *(Teorema della funzione opposta)*
Se f *ha limite* ℓ *per* $x \to x_0$*, allora* $-f$ *ha limite* $-\ell$ *per* $x \to x_0$*.*

Teorema 3.7. *Se* f_1, f_2 *hanno limiti* ℓ_1, ℓ_2 *al tendere di* x *a* x_0*, e* $\{\ell_1, \ell_2\} \neq \{0, \infty\}$*, allora il prodotto* $f_1 \cdot f_2$ *ha limite* $\ell_1 \ell_2$ *al tendere di* x *a* x_0*.*

Anche qui, come sopra, il Teorema esclude di trarre conclusioni se uno dei due limiti è 0 e l'altro è $+\infty$ o $-\infty$. Per esempio, se $f_1(x) = |x|$ e $f_2(x) = 1/|x|$, si ha che al tendere di x a 0 la prima funzione tende a 0, la seconda a $+\infty$, ma il loro prodotto è (di nuovo) la funzione costante di valore 1 su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, per cui il limite esiste ma vale 1.

Teorema 3.8. *(Teorema della funzione reciproca)*
Se f *ha limite* $\ell \neq 0$ *per* $x \to x_0$*, allora* $1/f$ *ha limite* $1/\ell$ *per* $x \to x_0$*.*

In generale, quindi, il passaggio al limite rispetta le operazioni tra funzioni (il limite di una somma è la somma dei limiti, etc), ma con alcune eccezioni, dette *forme indeterminate*, in cui i Teoremi precedenti non possono essere usati per dedurre alcunchè, e il calcolo del limite deve essere effettuato con argomenti ad hoc. Le forme indeterminate sono le seguenti:

$$\infty - \infty, \qquad 0 \cdot \infty, \qquad \frac{\infty}{\infty}, \qquad \frac{0}{0},$$

dove ∞ è uno tra $+\infty$ e $-\infty$.

Molto utile per il calcolo dei limiti è il seguente

Teorema 3.9. *(Teorema della funzione composta)*
Se $f : A \to B$*,* $g : C \to D$ *con* $f(A) \subseteq C$*,* x_0 *è di accumulazione per* A *ed esiste il limite* $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$*, e anche* ℓ *è di accumulazione per* C *ed esiste il limite* $\lim_{y\to\ell} g(y)$*, allora* $\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = \lim_{y\to\ell} g(y)$*.*

Il precedente Teorema ha in realtà una formulazione più generale, che però tralasciamo: per i nostri scopi, quello presentato va più che bene.

***Esempio* 3.10.** Se vogliamo calcolare $\lim_{x\to 0} \sqrt{x^2 + 1}$, che è la funzione composta tra $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = \sqrt{x}$, possiamo calcolare $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$, e poichè $\lim_{y\to 1} g(y) = \lim_{y\to 1} \sqrt{y} = 1$, possiamo usare il Teorema e concludere che $\lim_{x\to 0} \sqrt{x^2 + 1} = \lim_{y\to 1} \sqrt{y} = 1$. $\square$

Come si vede, questi Teoremi sono molto efficaci, e consentono di calcolare agevolmente dei limiti almeno nel caso delle funzioni algebriche.

4. Limiti delle funzioni algebriche

Come anticipato in precedenza, le funzioni algebriche sono continue su tutto il loro insieme di definizione. In particolare, poche funzioni semplici sono da comprendere approfonditamente per poter gestire tutti i casi possibili.

Notazione: nel seguito, scriveremo a^+ per dire *a destra di* a, cioè per valori che sono maggiori di a, e a^- per indicare che si va verso a dalla sua sinistra, come nella notazione introdotta per i limiti.

Tralasciando la funzione identità $f(x) = x$, il cui comportamento è immediatamente comprensibile, possiamo cominciare a considerare la prima funzione importante, che è la reciproca della funzione identità:

***Esempio* 4.1.** *(funzione $1/x$)*
Sia $f(x) = 1/x$, il cui dominio è $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Gli unici punti in cui ha senso calcolare il limite sono $0, +\infty$ e $-\infty$: in tutti gli altri punti la funzione è continua, e quindi per esempio $\lim_{x\to\sqrt{3}} 1/x = f(\sqrt{3}) = 1/\sqrt{3}$, etc.

$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0^+}$, cioè $f(x)$ va a zero passando per valori positivi. Infatti, fissato un arbitrario $\varepsilon > 0$, si ha che possiamo assumere $x > 0$ (per cui $1/x > 0$) e

$$\frac{1}{x} < \varepsilon \iff x > \frac{1}{\varepsilon},$$

il che vuol dire che posto $M = \frac{1}{\varepsilon}$, per ogni $x > M$ risulta $0 < f(x) < \varepsilon$.

$\boxed{\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0^-}$, cioè $f(x)$ va a zero passando per valori negativi. Infatti, fissato un arbitrario $\varepsilon > 0$, si ha che possiamo assumere $x < 0$ (per cui $1/x < 0$) e

$$0 > \frac{1}{x} > -\varepsilon \iff x < -\frac{1}{\varepsilon} < 0,$$

il che vuol dire che posto $M = \frac{1}{\varepsilon}$, per ogni $x < -M$ risulta $0 > f(x) > -\varepsilon$.

$\boxed{\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x} = +\infty}$. Infatti fissato un arbitrario $M > 0$ si ha che deve essere $\frac{1}{x} > M$ e, siccome deve essere $x > 0$ (perchè cerchiamo il limite destro) ciò equivale a dire che $x < \frac{1}{M}$. Perciò, per $\delta = \frac{1}{M}$, per ogni $x \in]0, \delta[$ è $\frac{1}{x} \in]M, +\infty[$.

$\boxed{\lim_{x\to0^-} \frac{1}{x} = -\infty}$. Fissiamo $M > 0$ arbitrario. Affinchè $\frac{1}{x} < -M$, e considerato che siccome ci interessa il limite sinistro dobbiamo assumere $x < 0$, si ha equivalentemente $x > -\frac{1}{M}$, per cui basta prendere $\delta = \frac{1}{M}$, di nuovo.

Possiamo dare uno schema riassuntivo, utile da tenere a mente, di questo studio:

$$\frac{1}{+\infty} = 0^+ \qquad \frac{1}{-\infty} = 0^- \qquad \frac{1}{0^+} = +\infty \qquad \frac{1}{0^-} = -\infty.$$

Altra funzione utile è

***Esempio* 4.2.** (Funzione potenza a esponente naturale)
Consideriamo la funzione $f(x) = x^n$, dove $1 < n \in \mathbb{N}$ (per $n = 1$ si ha la funzione identità). Il suo dominio è tutto $\mathbb{R}$, e in esso è continua. Resta da stabilire cosa

accade nei punti di accumulazione del dominio che non sono elementi del dominio, cioè $+\infty$ e $-\infty$. In realtà, è molto facile: $f = g \cdot g \cdot \ldots \cdot g$, dove $g(x) = x$ è la funzione identità e ci sono n fattori. Poichè $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$, per il Teorema sul prodotto di funzioni è $\lim_{x\to+\infty} x^n = (+\infty)(+\infty)\ldots(+\infty)$ (n fattori), cioè $+\infty$.

La stessa cosa accade per $x \to -\infty$: l'unica differenza è che $(-\infty)(+\infty) = -\infty$, per cui il valore del limite è ∞, ma il segno dipende dalla parità di n: se n è pari, allora $\lim_{x\to-\infty} x^n = +\infty$, se n è dispari allora $\lim_{x\to-\infty} x^n = -\infty$. □

***Esempio* 4.3.** (Funzione radice di indice q)
Consideriamo la funzione $f(x) = \sqrt[q]{x}$, dove $1 < q \in \mathbb{N}$. Il suo dominio contiene sempre l'intervallo $[0, +\infty[$, ma coincide con esso solo nel caso in cui q è pari. In tutti i casi, è immediato verificare che $\lim_{x\to 0^+} \sqrt[q]{x} = 0^+$ (è continua in $[0, +\infty[$) e $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[q]{x} = +\infty$.

Se invece q è dispari, allora il dominio di f è tutto $\mathbb{R}$, e si ha $\lim_{x\to 0} \sqrt[q]{x} = 0$, mentre $\lim_{x\to-\infty} \sqrt[q]{x} = -\infty$.

$\boxed{\lim_{x\to 0} \sqrt[q]{x} = 0}$ siccome la funzione è algebrica, è continua nel suo insieme di definizione, e quindi anche in 0. Se si vuole, si può fare una semplice verifica diretta sul solo limite sinistro (il limite destro lo conosciamo già), ottenendo $\lim_{x\to 0^-} \sqrt[q]{x} = 0^-$.

$\boxed{\lim_{x\to-\infty} \sqrt[q]{x} = -\infty}$ Fissato $M > 0$ arbitrariamente, possiamo assumere $x < 0$ e affinchè $\sqrt[q]{x} < -M < 0$ deve essere $-\sqrt[q]{x} > M > 0$. Essendo quantità positive, per una proprietà dei numeri reali ciò è equivalente a chiedere che la stessa disuguaglianza valga per le loro potenze q-me, e cioè che $-x > M^q$, cioè $x < -M^q$. Questo vuol dire che per ogni $x \in]-\infty, -M^q[$ risulta $\sqrt[q]{x} < M$.

Osservazione 4.4. Se $0 < \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, cioè α è un numero positivo irrazionale, il comportamento della funzione potenza $f(x) = x^\alpha$ è lo stesso di quello di $\sqrt[q]{x}$ con q naturale pari: il suo dominio è $[0, +\infty[$, è ivi continua e i limiti per $x \to 0^+$ e $x \to +\infty$ sono 0 e $+\infty$, rispettivamente. Si noti però che $f(x) = x^\alpha$, se α è irrazionale, NON è una funzione algebrica! □

***Esempio* 4.5.** (Funzione potenza a esponente razionale)
Fissiamo $0 < p/q \in \mathbb{Q}$ con $MCD(p, q) = 1$, e consideriamo la funzione $h(x) = x^{p/q} = \sqrt[q]{x^p}$. Detta $f(x) = x^p$ e $g(x) = \sqrt[q]{x}$, si ha che $h = g \circ f$, e quindi il suo insieme di definizione, e il comportamento in ∞, dipende dalla parità di p e q. Più che fare una tabella con i vari casi da memorizzare, è preferibile tenere presente quanto già fatto sinora e ragionare usando il teorema della funzione composta.

$\boxed{h(x) = \sqrt[4]{x^3}}$: qui, $f(x) = x^3$ è definita su tutto $\mathbb{R}$, mentre $g(y) = \sqrt[4]{y}$ solo per $y \geqslant 0$. Perciò h è definita solo quando $x^3 \geqslant 0$, cioè per $x \geqslant 0$. In zero, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0^+$, 0 è un punto di accumulazione per $g(y)$ e $\lim_{y\to 0^+} \sqrt[4]{y} = 0^+$, per cui per il teorema sul limite di una funzione composta si ha $\lim_{x\to 0^+} \sqrt[4]{x^3} = 0^+$ (in alternativa, più semplicemente, h è continua nel suo insieme di definizione, per cui quel limite è $h(0) = 0$, da destra perchè h è a valori in $[0, +\infty[$).

Inoltre, $\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$, che è un punto di accumulazione per il dominio di g, e $\lim_{y\to+\infty} \sqrt[4]{y} = +\infty$, per cui $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[4]{x^3} = +\infty$.

$\boxed{h(x) = \sqrt[3]{x^4}}$: qui $f(x)$ è definita su tutto $\mathbb{R}$, e così pure $g(x)$, per cui il dominio di $h(x)$ è tutto $\mathbb{R}$. In zero, così come in ogni altro $x_0 \in \mathbb{R}$, la funzione h (essendo algebrica) è continua, e così per esempio $\lim_{x\to 0} h(x) = \sqrt[3]{x^4} = 0$. Il ragionamento svolto più sopra per $x \to +\infty$ continua a valere, per cui $\lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$, e resta da capire cosa accade per $x \to -\infty$: si ha $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, e quindi $\lim_{x\to-\infty} h(x) = +\infty$.

Osservazione 4.6. Come agire nel caso di funzioni potenza con esponente $\alpha < 0$? Non c'è da ragionarci troppo: detto $\beta := -\alpha > 0$, la funzione $f(x) = x^\alpha$ è la funzione reciproca della funzione $g(x) = x^\beta$, e quindi possiamo studiare la funzione $g(x) = x^\beta$ e poi usare il Teorema sul limite della funzione reciproca. Per esempio, $f(x) = x^{-3/4}$ è la funzione reciproca della funzione $g(x) = x^{3/4} = \sqrt[4]{3}$, definita su $[0, +\infty[$. Perciò, f è definita su $]0, +\infty[$. Se vogliamo calcolare ad esempio $\lim_{x\to0^+} f(x)$, possiamo calcolare $\lim_{x\to0^+} \sqrt[4]{3} = 0^+$, e poi dedurre che per la funzione reciproca $f = 1/g$ si ha come limite $1/0^+ = +\infty$. □

5. Esempi di calcolo di limiti di funzioni algebriche

***Esempio* 5.1.** *Calcolare il limite, per $x \to x_0 \in \{+\infty, -\infty, 3\}$, della funzione $f(x) = x^5 + x^3$.*
La funzione è la somma delle funzioni $g(x) = x^5$ e $h(x) = x^3$. Entrambe sono definite e continue su tutto $\mathbb{R}$, e in particolare sono continue in 3, per cui $\lim_{x\to3} g(x) = g(3) = 3^5$ e $\lim_{x\to3} h(x) = h(3) = 3^3$. Per il teorema sul limite della somma di funzioni, si ha $\lim_{x\to3} h(x) = 3^5 + 3^3$.

Similmente, poichè per $x \to +\infty$ sia il limite di g che quello di h è $+\infty$, il limite di f è la loro somma, cioè $(+\infty)+(+\infty) = +\infty$. Stesso ragionamento per verificare che $\lim_{x\to-\infty} = -\infty$. □

***Esempio* 5.2.** *Calcolare il limite, per $x \to x_0 \in \{+\infty, -\infty, 2\}$, della funzione $f(x) = x^5 - x^3$.*
Siano $g(x) = x^5$ e $h(x) = x^3$. Allora $f = g + (-h)$ (dove, come sappiamo, $-h$ indica l'opposta della funzione h). Poichè sia g che h sono continue in 2, si ha che per $x \to 2$ i loro limiti valgono $g(2) = 2^5$ e $h(2) = 2^3$; per il teorema sul limite della funzione opposta, il limite $\lim_{x\to2} -h(x) = -2^3$, l'opposto del limite di h in 2. Per il teorema sul limite di una somma si ha $\lim_{x\to2} f(x) = 2^5 - 2^3 = 24$.

Calcolando il limite per $x \to +\infty$ si ha $g(x) \to +\infty$, così come $h(x) \to +\infty$, e quindi $-h(x) \to -\infty$: qui perciò non possiamo applicare il teorema sul limite di una somma, che darebbe la forma indeterminata $(+\infty) + (-\infty)$. Possiamo però aggirare il problema, e usare il teorema sul limite di un prodotto: si ha

$$h(x) = x^5 - x^3 = x^5 \left(1 - \frac{1}{x^3}\right),$$

per cui possiamo vedere h come un *prodotto* di funzioni, precisamente della funzione $u(x) = x^5$ e $v(x) = 1 - \frac{1}{x^3}$. E' vero che la seconda funzione, v, è definita solo su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, ma il prodotto uv coincide con la funzione f su $]0, +\infty[$, per cui hanno lo stesso limite per $x \to +\infty$. Dato che $\lim_{x\to+\infty} = 0^+$, si ha che (per il teorema sulla somma) $\lim_{x\to+\infty} v(x) = 1$, e quindi per il teorema del limite del prodotto si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = (+\infty) \cdot (+1) = +\infty.$$

Con un ragionamento analogo si prova che $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Usualmente, si dice che *"nella somma $x^5 - x^3$ prevale l'addendo x^5, che va a $\pm\infty$ più velocemente di x^3"*. □

***Esempio* 5.3.** *Calcolare* $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x^2+x-2}$.

Qui la funzione è il prodotto della funzione $f(x) = x^2 - 1$ e della funzione $g(x) = \frac{1}{x^2+x-2}$, cioè della funzione reciproca della funzione $h(x) = x^2 + x - 2$. Quindi la funzione assegnata è definita in $\mathbb{R} \setminus \{1, -2\}$ (valori in cui la funzione h si annulla). Non ha quindi senso calcolarne il valore in 1, ma essendo 1 un punto di accumulazione per il suo dominio ha senso calcolarne il limite. Tuttavia, visto che $f(x)$ tende a $+\infty$ mentre $g(x)$ tende a 0 per $x \to 1$, il teorema sul limite di un prodotto non funziona perchè darebbe $(+\infty) \cdot 0$. Invece, possiamo scrivere $h(x) = (x-1)(x+2)$, e visto che $f(x) = (x-1)(x+1)$, intorno a 1 (ma per valori $\neq 1$) si ha

$$\frac{x^2-1}{x^2+x-2} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{x+1}{x+2}.$$

Ora è facile calcolare il limite per x che tende a 1: la funzione $\frac{x+1}{x+2}$ non è quella di partenza (cambia il suo dominio!), ma intorno a 1 coincide con essa, e quindi ha lo stesso limite. Di più: in 1 è continua, per cui il suo limite è semplicemente $\frac{2}{3}$. Possiamo perciò concludere che

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^2+x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x+1}{x+2} = \frac{2}{3}.$$

In linguaggio corrente, si usa dire che la funzione $\frac{x^2-1}{x^2+2x-2}$ è *prolungabile per continuità nel punto* 1. □

***Esempio* 5.4.** *Calcolare* $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2+1}{x^2+x-2}$.

Valgono un po' gli stessi ragionamenti di prima, solo che sono più semplici: la funzione al numeratore è continua in 1, per cui il suo limite per $x \to 1$ è $1^2 + 1 = 2$; la funzione al denominatore invece tende a 0^- se $x \to 1^-$ e tende a 0^+ se $x \to 1^+$: infatti $x^2 + x - 2$ è negativa precisamente nell'intervallo $]-2, 1[$. Questo vuol dire che

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+1}{x^2+x-2} = \frac{2}{0^+} = 2\frac{1}{0^+} = 2 \cdot (+\infty) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+1}{x^2+x-2} = \frac{2}{0^-} = 2\frac{1}{0^-} = 2 \cdot (-\infty) = -\infty.$$

Perciò esistono entrambi i limiti, destro e sinistro, della funzione data per $x \to 1$, ma sono diversi, e il limite cercato non esiste. Sempre per usare lo stesso linguaggio gergale di prima, alcuni direbbero che 1 *è un punto di discontinuità ineliminabile, o essenziale, della funzione.*

Inoltre, la retta verticale di equazione $x = 1$, cui il grafico della funzione si avvicina al tendere di x verso 1, prende il nome di *asintoto verticale* della funzione. □

***Esempio* 5.5.** *Calcolare* $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{x^2+1}{x^2+x-2}$.

Se $x \to +\infty$, la funzione al numeratore tende a $+\infty$, e poichè al denominatore succede la stessa cosa, come visto prima, applicare direttamente i teoremi sui limiti darebbe una forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$ (interpretando la funzione come il rapporto tra funzioni polinomiali) oppure $\infty \cdot 0$ (interpretando, più correttamente, la funzione f

come prodotto della funzione polinomiale del numeratore per la funzione reciproca della funzione polinomiale al denominatore, $f(x) = (x^2+1)\cdot\frac{1}{x^3+x-2})$.

In realtà, usando il "trucco" visto poco più sopra, poichè $x^2+1 = x^2(1+\frac{1}{x^2})$ e $x^2+x-2 = x^2(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2})$, si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x^2+x-2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2(1+\frac{1}{x^2})}{x^2(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2})} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}} = 1.$$

La retta orizzontale $y = 1$, in analogia con ciò che abbiamo visto nell'esempio precedente, si chiama un asintoto orizzontale per la funzione f.

Alla stessa maniera si prova che $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{x^2+x-2} = 1$. □

Osservazione 5.6. Come fatto generale, se $p(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ e $q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ sono polinomi di grado m ed n rispettivamente, allora

$$\lim_{x\to\infty}\frac{p(x)}{q(x)} = \begin{cases} \infty & \text{se } m > n \\ \dfrac{a_m}{b_m} & \text{se } m = n \\ 0 & \text{se } m < n \end{cases}$$

e il ragionamento è precisamente quello sviluppato nell'esercizio precedente. Chiaro che se il limite è ∞ il segno deve essere determinato con un po' di cura. □

***Esempio* 5.7.** Calcolare $\lim_{x\to1}\dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{2x^3+3x^2-2x-3}$.

Il primo tentativo da fare è applicare il teorema sul prodotto di funzioni, visto che a numeratore e a denominatore ci sono funzioni polinomiali e quindi continue in $x_0 = 1$. Sfortunatamente, si ha $f(1) = \frac{0}{0}$, una forma indeterminata (1, evidentemente, non appartiene al dominio di f, e in più annulla anche il numeratore).

Per il Teorema di Ruffini, tuttavia, sappiamo che $\alpha\in\mathbb{R}$ annulla il polinomio $p(x)$ (cioè $p(\alpha) = 0$; un modo equivalente per esprimere ciò è dire che α è una radice di p, ma in questo contesto sarebbe bene evitare di usare il termine radice per evitare di confondersi con $\sqrt{p}$!) se e solo se $(x-\alpha)$ divide il polinomio $p(x)$ (cioè, esiste un polinomio $q(x)$ tale che $p(x) = q(x)(x-\alpha)$).

Nel nostro caso,

- $x^3-6x^2+11x-6 = (x-1)(x^2-5x+6)$
- $2x^3+3x^2-2x-3 = (x-1)(2x^2+5x+3)$

per cui

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3-6x^2+11x-6}{2x^3+3x^2-x-3} = \lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2-5x+6)}{(x-1)(2x^2+5x+3)} = \lim_{x\to1}\frac{x^2-5x+6}{2x^2+5x+3},$$

e non c'è alcuna difficoltà a calcolare per continuità questo limite, che vale $2/10 = 1/5$. Qui, di nuovo, abbiamo una "discontinuità eliminabile" della funzione reale f nel punto 1. □

Attenzione: un errore comune è quello di "usare" ingenuamente il risultato dell'osservazione precedente e dedurre che il limite precedente è $1/2$, cioè il rapporto tra i coefficienti direttori dei polinomi a numeratore e a denominatore! Quello assegnato è il limite per $x\to1$, non quello per $x\to+\infty$ o $x\to-\infty$.

***Esempio* 5.8.** Calcolare $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}}$ e $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}}$.

La funzione è definita per $x > 1$, per cui il limite è naturalmente per $x \to 1^+$ (anche se non è scritto). E' un calcolo molto semplice: se $x \to 1^+$, il numeratore della frazione tende a zero per valori positivi, mentre il denominatore tende a uno, per cui il limite è semplicemente $0/1 = 0$.

Per $x \to +\infty$, sia il numeratore che il denominatore della frazione tendono a $+\infty$, per cui si ha una forma indeterminata. Tuttavia, per $x > 1$, si ha

$$\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{x-1}{x}}$$

per cui per $x > 1$ la funzione assegnata coincide con la funzione composta di $f(x) = \frac{x-1}{x}$ con $g(y) = \sqrt{y}$, cioè $g \circ f$.[2] Poichè $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1^+$ e $\lim_{y\to 1^+}\sqrt{y} = 1$, si ha che il limite cercato è 1, ovviamente per valori positivi. □

***Esempio* 5.9.** Calcolare $\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{x-1}$.

La funzione non è definita in 1, ma esso è un punto di accumulazione per il suo insieme di definizione. Sfortunatamente, anche se numeratore e denominatore sono funzioni continue in 1, esse valgono entrambe 0 in 1, e quindi si ha una forma indeterminata $\frac{0}{0}$ (o $0 \cdot \infty$, a seconda che si voglia guardare alla funzione come a un rapporto o a un prodotto di funzioni, rispettivamente).

Qui si può usare un piccolo trucco: per ogni $x \neq 1$ si ha

$$\frac{1-\sqrt{x}}{x-1} = \frac{1-\sqrt{x}}{x-1}\cdot\frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = \frac{1-x}{(x-1)(1+\sqrt{x})} = -\frac{1}{1+\sqrt{x}},$$

che è definita anche in $x = 1$ ed ivi continua. Perciò questa funzione coincide con quella data intorno a 1, e dunque ha lo stesso limite per $x \to 1$. Nello specifico, tale limite vale $-\frac{1}{2} = -\frac{1}{1+1}$. □

6. Esercizi

Esercizio 6.1. *Calcolare* $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2+1}$ **[0]**

Esercizio 6.2. *Calcolare* $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-x}$ **[2]**

Esercizio 6.3. *Calcolare* $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^3-1}$ **[2/3]**

Esercizio 6.4. *Calcolare* $\lim_{x\to -3}\frac{x+3}{x^2+4x+3}$ **[-1/2]**

Esercizio 6.5. *Calcolare* $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-1}{x^2-2x+3}$ **[5/3]**

Esercizio 6.6. *Calcolare* $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{x^2+1}$ **[1]**

Esercizio 6.7. *Calcolare* $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-1}{2x^2+1}$ **[3/2]**

[2] Invece, la funzione $\sqrt{\frac{x-1}{x}}$ è, come sappiamo, definita su $]-\infty, 0[\,\cup\,]1, +\infty[$

Esercizio 6.8. *Calcolare* $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$ **[-1]**

Esercizio 6.9. *Calcolare* $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x}}{2\sqrt[3]{x}-\sqrt[7]{x}}$ **[1/2]**

Esercizio 6.10. *Calcolare* $\lim_{x\to 2} \frac{x^4-16}{x^2-6x+8}$ **[-4]**

Esercizio 6.11. *Calcolare* $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-2x^2+x-2}{x^3-2x^2-x+2}$ **[5/3]**

Esercizio 6.12. *Calcolare* $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2x+3}{4-x^2}$ **[-1]**

Esercizio 6.13. *Calcolare* $\lim_{x\to 1} \frac{1-\sqrt{3x-2}}{x-1}$ **[-3/2]**

Esercizio 6.14. *Calcolare* $\lim_{x\to 5} \frac{2x-\sqrt{11x+45}}{x^2-6x+5}$ **[29/80]**

Esercizio 6.15. *Calcolare* $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{3x-5}}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+1}}$ **[1/2]**