NOTE SULLE FUNZIONI

Indice

Il concetto di funzione, o *applicazione*, tra insiemi è presentato sul libro di testo, nel capitolo 2. Si invita perciò a prendere visione dei contenuti ivi presenti (in particolare, i paragrafi 1 e 2) per ciò che riguarda notazione e terminologia di base, che non saranno ripetute in queste brevi note. Ricordiamo solo la seguente definizione circa alcune proprietà peculiari delle funzioni:

Definizione 0.1. Sia $f : A \to B$ una funzione. Si dice che f è

(1) iniettiva se $\forall a_1, a_2 \in A$ se $a_1 \neq a_2$ allora $f(a_1) \neq f(a_2)$; in termini discorsivi, cioè, se f preserva elementi distinti;
(2) suriettiva se $\forall b \in B\ \exists a \in A$ tale che $b = f(a)$, cioè se ogni elemento di B è immagine di qualche elemento di A;
(3) bigettiva se è sia iniettiva che suriettiva.

L'iniettività può essere riformulata equivalentemente in una forma più pratica nelle verifiche:

Proposizione 0.2. *La funzione $f : A \to B$ è iniettiva se e solo se*

$$\forall x, y \in A \quad f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$

***Esempio* 0.3.** La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2$ non è nè iniettiva, nè suriettiva. Infatti

- esistono numeri reali che, pur essendo distinti, hanno la stessa immagine. Per esempio, $f(-1) = 1 = f(1)$. Quindi f non è iniettiva;
- esistono numeri reali (pensati nel codominio) che non sono immagine di alcun elemento del dominio. Per esempio, il numero $-1 \in B = \mathbb{R}$ è nel codominio di f ma dato che per ogni $a \in A = \mathbb{R}$ risulta $f(a) = a^2 \geqslant 0$ è falso che $-1 = f(x)$ per un opportuno $x \in \mathbb{R}$. Quindi f non è iniettiva.

***Esempio* 0.4.** La funzione $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty[$ definita ponendo $f(x) = |x|$ è suriettiva ma non iniettiva:

- si ha $f(-1) = f(1)$, per cui f non è iniettiva;
- se $b \in [0, +\infty[$, esiste certamente un elemento $a \in A = \mathbb{R}$ tale che $b = f(a)$: basta prendere $a = b$ stesso.

La funzione $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definita come prima, $g(x) = |x|$, è non solo diversa dalla precedente (hanno dominio e codominio differenti), ma risulta iniettiva e non suriettiva:

- se $x \in [0, +\infty[$ si ha $|x| = x$; perciò per ogni coppia $x, y \in A = [0, +\infty[$ se risulta $g(x) = g(y)$ allora dev'essere $x = y$, cioè g è iniettiva;
- il numero $-1 \in B = \mathbb{R}$ non è nell'immagine della funzione[1], per cui g non è suriettiva.

***Esempio* 0.5.** La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 2x - 1$ è sia iniettiva che suriettiva, e quindi è bigettiva. Infatti:

- per ogni coppia $x, y \in \mathbb{R}$, se $f(x) = f(y)$, cioè $2x - 1 = 2y - 1$, allora $x = y$. Questo vuol dire che la funzione è iniettiva
- preso un arbitrario $y \in \mathbb{R}$, esso è immagine di un opportuno elemento $\overline{x} \in A = \mathbb{R}$: infatti affinchè $y = f(\overline{x}) = 2\overline{x} - 1$, risolvendo l'equazione $y = 2\overline{x} - 1$ rispetto $\overline{x}$ si trova $\overline{x} = \frac{1}{2}(y+1)$. Questo vuol dire che la funzione f è suriettiva.

Osservazione 0.6. L'iniettività dipende sì dalla funzione, ma anche dal suo dominio: se f non è iniettiva, vuol dire che ci sono almeno due elementi distinti $u, v \in A$ che hanno la stessa immagine in B, cioè che $f(u) = f(v)$. Se da A rimuoviamo gli elementi che hanno la stessa immagine di un altro elemento, si ottiene un sottinsieme $\overline{A} \subseteq A$ e una funzione $\overline{f} : \overline{A} \to B$, definita ponendo $\forall \overline{a} \in \overline{A}\ \overline{f}(\overline{a}) := f(a)$, che è per costruzione iniettiva.

Discorso simile per la suriettività: preso $\underline{B} := f(A) \subseteq B$, la funzione $\underline{f} : A \to \underline{B}$ e definita ponendo $\forall a \in A\ \underline{f}(a) := f(a)$ è ovviamente suriettiva. Chiaro che la funzione $g : \overline{A} \to f(A)$, definita da $g(a) := f(a)$ per ogni $a \in \overline{A}$ è una bigezione.

Un modo equivalente di guardare alle funzioni bigettive è il seguente:

Proposizione 0.7. *Una funzione $f : A \to B$ è bigettiva se e solo se è invertibile.*

Si ricordi che f è invertibile se esiste una funzione $g : B \to A$ tale che $g \circ f = Id_A$ e $f \circ g = Id_B$. In tal caso, la funzione g è unica, la si denota con f^{-1} e la si dice <u>la</u> funzione inversa di f.

1. Operazioni tra funzioni reali di una variabile reale

A parte l'operazione di composizione tra funzioni, se consideriamo funzioni reali di variabili reali, cioè funzioni $f : A \to \mathbb{R}$ dove $A \subseteq \mathbb{R}$, abbiamo altre operazioni possibili:

Definizione 1.1. Siano f, g funzioni definite su un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ e a valori in $\mathbb{R}$.

- Si dice funzione somma tra f e g la funzione
$$\begin{array}{rccc} f + g : & A & \to & \mathbb{R} \\ & x & \to & f(x) + g(x) \end{array}$$
- Si dice funzione prodotto tra f e g la funzione
$$\begin{array}{rccc} f \cdot g : & A & \to & \mathbb{R} \\ & x & \to & f(x) \cdot g(x) \end{array}.$$

Tali operazioni condividono molte delle proprietà dei numeri reali: sono associative e commutative e vale la proprietà distributiva del prodotto rispetto l'addizione tra funzioni.

[1] ricordiamo che l'*immagine della funzione* g è, per definizione, $g(A) \subseteq B$. Nel caso specifico, $g([0, +\infty[) = [0, +\infty[$

***Esempio* 1.2.** Se $a \in \mathbb{R}$, la funzione $\hat{a} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $\hat{a}(x) := a$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (funzione costante di valore a), e la funzione $Id_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ da $Id_{\mathbb{R}}(x) := x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (funzione identità su $\mathbb{R}$) possono essere sommate,

$$\hat{a} + Id_{\mathbb{R}} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} & \\ x & \to & x + a \end{array}$$

e anche moltiplicate

$$\hat{a} \cdot Id_{\mathbb{R}} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} & \\ x & \to & ax \end{array} .$$

Osservazione 1.3. Di solito, se non ci sono esigenze di chiarezza particolari, si semplifica la notazione, e invece di scrivere $\hat{a}f$ (formalmente preciso ma ridondante) si scrive direttamente af (meno preciso formalmente, ma più semplice). Si dice anche che af è il *multiplo di f secondo il numero reale a*, o anche che è il multiplo di f secondo lo scalare a.

Le funzioni costanti $\hat{0}_A$ e $\hat{1}_A$ (che assumono valore costante 0 e 1 sull'insieme A) svolgono il ruolo di elemento neutro per la somma tra funzioni e per il loro prodotto, rispettivamente. Avendo a disposizione degli elementi neutri, ha senso parlare di funzione *opposta* e di funzione *reciproca* di una data funzione $f : A \to \mathbb{R}$.[2]

Definizione 1.4. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione reale.

- Si dice funzione opposta di f la funzione

$$-f : \begin{array}{ccc} A & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & -x \end{array} ,$$

  cioè la funzione definita sullo stesso dominio di f e che, sommata a f, dà la funzione costante $\hat{0}_A$ (funzione *nulla* su A);
- detto $A^\sharp := \{x \in A \mid f(x) \neq 0\}$ (l'insieme degli elementi di A in cui f non vale zero), si dice funzione reciproca di f la funzione

$$\frac{1}{f} : \begin{array}{ccc} A^\sharp & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \frac{1}{f(x)} = (f(x))^{-1} \end{array} ,$$

  cioè la funzione definita su $A^\sharp$ che, moltiplicata per f, dà la funzione che su $A^\sharp$ assume valore costante 1.

Si noti che gli unici problemi sull'insieme di definizione compaiono nella formazione della funzione reciproca, e per poter operare bisogna accettare una riduzione del dominio di f, che passa da A all'insieme $A^\sharp$.

Si stia sempre ben attenti a non confondere funzione inversa e funzione reciproca!

***Esempio* 1.5.** Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) := 2x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Essendo bigettiva, è invertibile, e quindi esiste un'unica funzione inversa, precisamente la funzione $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che manda ogni $x \in \mathbb{R}$ in $\frac{x}{2}$.

D'altra parte, essa ammette anche una funzione reciproca:

$$\frac{1}{f} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^\sharp & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \frac{1}{2x} \end{array} .$$

[2] si evita di parlare di funzione inversa, riferendosi al prodotto tra funzioni reali, lasciando il termine *funzione inversa* al contesto della composizione tra funzioni

Si verifichi personalmente che non solo $f \circ \frac{1}{f} \neq Id_{\mathbb{R}^\sharp}$, ma l'altra composizione $\frac{1}{f} \circ f$ non è nemmeno definita. $\square$

2. Funzioni algebriche

Indichiamo per comodità con g la funzione identità su $\mathbb{R}$, cioè sia $g := Id_{\mathbb{R}}$. E' chiaro cosa intendere con *potenza n-ma di g*, se n è un naturale positivo: $g^n = g \cdot g \cdot \ldots \cdot g$ (n fattori). La funzione g^n ha $\mathbb{R}$ come insieme di definizione, e operativamente è definita da

$$g^n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & x^n \end{array} .$$

Solo per g^0 c'è da fare una piccola distinzione: se x è un numero reale non zero, si ha $x^0 = 1$, ma l'espressione 0^0 non è definita. Perciò, l'insieme di definizione di g^0 è l'insieme $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ invece che $\mathbb{R}$, e g^0 manda ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ in 1.

In generale, non è necessario assumere che l'esponente n sia un naturale: come per i numeri, è possibile definire g^α per $\alpha \in \mathbb{R}$, ma servono alcune piccole accortezze. Dato che il caso g^0 è già stato considerato, supponiamo che $\alpha > 0$:

Definizione 2.1. Sia $0 < \alpha \in \mathbb{R}$, e si consideri la funzione g^α, la cui legge di formazione è $g^\alpha(x) := x^\alpha$:

- se $\alpha \notin \mathbb{Q}$, l'insieme di definizione di g^α è $[0, +\infty[$
- se $\alpha = p/q \in \mathbb{Q}$, con $MCD(p, q) = 1$, l'insieme di definizione di g^α è
  - $\mathbb{R}$, se q è dispari
  - $[0, +\infty[$ se q è pari.

  Operativamente, $g^{p/q}(x) = \sqrt[q]{x^p}$.

Per completare il panorama, dobbiamo considerare il caso $\alpha < 0$:

Definizione 2.2. Sia $0 > \alpha \in \mathbb{R}$. La funzione g^α è la funzione reciproca di $g^{-\alpha}$. In quanto tale, se D è il dominio di $g^{-\alpha}$, il dominio di g^α è $D^\sharp$.

***Esempio* 2.3.**

(1) Per $\alpha = 3/5$, la funzione $g^{3/5}$ ha come insieme di definizione tutto $\mathbb{R}$, e manda $x \to \sqrt[5]{x^3}$;
(2) se $\alpha = 3/4$, la funzione $g^{3/4}$ è invece definita su $[0, +\infty[$, e manda $x \to \sqrt[4]{3}$; infatti, se per esempio volessimo attribuire ad x il valore -2, otterremmo $\sqrt[4]{-8}$, che NON è un numero reale;
(3) se $\alpha = \pi$, la funzione g^π è definita pure solo su $[0, +\infty[$, e manda $x \to x^\pi$;
(4) se $\alpha = -3/4$, invece, prima costruiamo la funzione $g^{-\alpha} = g^{3/4}$, che è definita in $D = [0, +\infty[$ e manda $x \to \sqrt[4]{x^3}$, e poi ne prendiamo la reciproca per avere g^α. Essa sarà definita su $D^\sharp =]0, +\infty[$, e manderà $x \to \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$.

Quale che sia $\alpha \in \mathbb{R}$, la funzione g^α è detta *funzione potenza ad esponente* α. Combinando le funzioni potenza con le operazioni $+, \cdot, \circ$ si ottiene la classe di funzioni dette *algebriche*. Esempi notevoli sono i seguenti:

Definizione 2.4. Per $0 \neq a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$, la funzione $ag + b$, definita su tutto $\mathbb{R}$, che manda $x \to ax + b$, si dice *lineare affine*. E' la somma tra la funzione costante $\hat{b}$ e il prodotto tra $\hat{a}$ e $g = g^1$.

Definizione 2.5. Se $0 \neq a \in \mathbb{R}$, e $b, c \in \mathbb{R}$, la funzione $ag^2 + bg + c$, definita su tutto $\mathbb{R}$, che manda $x \to ax^2 + bx + c$, si dice *quadratica*.

Definizione 2.6. Se $0 \neq a \in \mathbb{R}$, e $b, c, d \in \mathbb{R}$, la funzione $ag^3 + bg^2 + cg + d$, definita su tutto $\mathbb{R}$, che manda $x \to ax^2 + bx + c$, si dice *quadratica*.

Definizione 2.7. Se $0 \neq a_n \in \mathbb{R}$, e $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$, la funzione $a_n g^n + a_{n-1}g^{n-1} + \cdots + a_1 g + a_0$, definita su $\mathbb{R}$ e che manda $x \to a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, è detta *polinomiale di grado* n.

Definizione 2.8. Se f, g sono funzioni polinomiali, la funzione f/g, definita su $D_g^\sharp$ e che manda $x \to f(x)/g(x)$, è detta una *razionale*.

Altre funzioni algebriche sono le irrazionali, ottenute componendo una funzione potenza ad esponente razionale con funzioni razionali

***Esempio* 2.9.** La funzione

$$f(x) := \sqrt{\frac{2x^2+1}{2x^2-1}}$$

è ottenuta componendo la funzione razionale $r(x) := \frac{2x^2+1}{2x^2-1}$ con la funzione potenza $g^{1/2}$, che manda $x \to x^{1/2}$. Precisamente, $f = g^{1/2} \circ r$.

Qual è l'insieme di definizione di f? Intanto, dev'essere definita r, e quindi bisogna considerare $D_r = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pm 1/\sqrt{2}\}$. Però deve anche essere definita $g^{1/2}$, e quindi ci serve che $r(x)$ assuma valori non negativi. L'insieme di definizione di f è perciò ottenuto dal sistema

$$\begin{cases} x \neq \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2x^2+1}{2x^2-1} \geqslant 0 \end{cases},$$

che risolto fornisce $D_f =]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}[\cup]\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty[$, o in forma diversa, $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{1}{\sqrt{2}} \vee x > \frac{1}{\sqrt{2}}\}$. □

Osservazione 2.10. Nella pratica, di solito si assegna direttamente la legge di formazione di una funzione, come nell'esempio precedente: negli esercizi, si trova scritto direttamente "*Data la funzione* $f(x) = \ldots$", lasciando al lettore il compito di determinare quale sia il corretto insieme di definizione D_f, cioè il massimo sottinsieme di $\mathbb{R}$ su cui ha senso considerare f (salvo esplicita indicazione differente).

E' perciò necessaria un po' di attenzione: se f è definita sul dominio $D_f \subseteq \mathbb{R}$, e g è definita sul dominio $D_g \subseteq \mathbb{R}$, sia la funzione $f + g$ che quella $f \cdot g$ sono definite sul dominio $D_f \cap D_g$, sempre che esso non sia l'insieme vuoto.

Per esempio, se $f(x) = \sqrt{x}$, il suo dominio è l'insieme $D_f = [0, +\infty[$; se poi $g(x) = \sqrt{x-1}$, è $D_g = [1, +\infty[$. La loro somma è allora definita in $D_f \cap D_g = [1, +\infty[$, ed è la funzione

$$f+g: \begin{array}{ccc} [1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \sqrt{x}+\sqrt{x-1} \end{array}.$$

Per il prodotto, similmente,

$$f \cdot g: \begin{array}{ccc} [1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \sqrt{x}\sqrt{x-1} \end{array}.$$

Si presti attenzione al fatto che la funzione $f \cdot g$ appena vista, e la funzione $h(x) = \sqrt{x^2 - x}$ sono diverse: infatti $D_h =]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$, un insieme diverso da quello del prodotto $f \cdot g$ (per esempio, per $x = -1$ la funzione f, e quindi la funzione $f \cdot g$, non è definita, mentre h sì).

Un ulteriore esempio, per rendersi conto di come l'attenzione sia necessaria: se $f(x) = \sqrt{x-2}$ e $g(x) = \sqrt{1-x}$, la somma $f+g$ non può essere definita! infatti $D_f = [2, +\infty[$, e $D_g =]-\infty, 1]$, per cui l'insieme $D_f \cap D_g$ è vuoto. □

Le funzioni razionali, anche se essenzialmente naturali, possono avere comportamenti molto difficili da prevedere, ma modellano molti problemi reali e, in genere, siamo contenti quando un problema è modellato tramite una funzione razionale.

Tra esse, quelle polinomiali sono sicuramente quelle più semplici e di uso più comune, specialmente quelle lineari, quadratiche e cubiche. A questo proposito, va notata una cosa semplice ma importante:

Teorema 2.11. (Principio di identità tra polinomi)
Se due funzioni polinomiali di grado n coincidono su $n+1$ valori distinti della variabile, allora i polinomi da cui nascono sono uguali. In particolare, le funzioni polinomiali di partenza sono uguali (cioè coincidono su tutto $\mathbb{R}$).

Questo comporta che basta conoscere il valore assunto su $n+1$ punti distinti per poter ricostruire univocamente l'intera funzione polinomiale.

***Esempio* 2.12.** Supponiamo di sapere che f è una funzione lineare affine, e che $f(0) = 1$ mentre $f(1) = 10$. Ciò ci basta per determinare completamente $f(x)$: infatti essa dovrà essere della forma $f(x) = ax+b$, e sappiamo che $1 = f(0) = a \cdot 0 + b$, e che $10 = f(1) = a + b$. Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} b = 1 \\ a + b = 10 \end{cases}$$

si ottiene $f(x) = 9x + 1$, per cui la funzione f è completamente determinata. □

Nella pratica, molto spesso da una serie di dati raccolti si cerca di costruire un modello matematico (una funzione) che realizzi il comportamento generale del fenomeno, almeno nell'ambito della realizzabilità del fenomeno (interpolazione) essendo la realizzabilità del fenomeno all'esterno di tale ambito non necessariamente garantita. Per esempio: se misuriamo il peso di un gattino una volta a settimana per 10 settimane, l'ambito del fenomeno è compreso nell'intervallo $[1, 10]$, e potremmo provare a interpolare l'andamento del peso per avere una funzione che ci dia non solo il valore già misurato il giorno $1, 2, \ldots, 10$, ma anche nei giorni intermedi $(1 + 1/7, 1 + 2/7, \ldots, 2)$, con continuità.

Il primo tentativo che si fa è provare con funzioni polinomiali, e nello specifico del nostro caso con una funzione polinomiale f di grado 9 (perchè abbiamo 10 valori noti). Questa sicuramente coinciderà con i valori noti, e sarebbe da verificare se questo modello (di interpolazione) corrisponde al vero nei giorni intermedi. D'altra parte, mentre ha certamente senso calcolare $f(-1000)$, non avrebbe senso usare il numero ottenuto per esprimersi sul peso del gattino 1000 settimane prima della prima misurazione!

Cercare una funzione o un modello che descriva un fenomeno al di fuori dell'ambito di osservabilità si chiama estrapolazione, ed è chiaramente cosa molto pericolosa da fare, anche se talvolta produce risultati effettivi.

Osservazione 2.13. Le funzioni lineari affini sono sempre bigettive, e quindi invertibili. Le funzioni quadratiche invece non sono mai nè iniettive, nè suriettive. Per le funzioni cubiche, è sicuro che siano suriettive, ma non sempre sono iniettive (e quindi non sempre sono invertibili). Per esempio, $f(x) = x^3 - x$ è sicuramente suriettiva, ma non iniettiva (perchè $f(1) = f(0) = 0$), mentre $g(x) = x^3 + x$ è bigettiva.

Il perchè di queste affermazioni sarà chiaro successivamente.

Approfondimenti sulle funzioni algebriche sono disponibili sul libro di testo, precisamente nel capitolo 5.

3. Esercizi

Esercizio 1. Sia $f : A \to B$ una funzione. Stabilire quale delle seguenti affermazioni sono vere o false:

(1) Può esistere un elemento di B che è associato ad elementi distinti di A;
(2) Può esistere un elemento di A che è associato ad elementi diversi di B;
(3) Ogni elemento di B è associato ad un unico elemento di A;
(4) Ogni elemento di B è associato ad almeno un elemento di A.

Esercizio 2. Siano

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & x^2 - 1 \end{array}, \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & x^2 + 1 \end{array}.$$

Dire se le funzioni composte $g \circ f$ e $f \circ g$ sono definite, e determinarle esplicitamente.

Esercizio 3. Determinare in quali dei seguenti casi la funzione f è iniettiva e/o suriettiva. Inoltre, si mostri con esempi che la iniettività e/o la suriettività non è soddisfatta.

(1) $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty[$ definita da $f(x) := x^2$
(2) $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ definita da $f(x) := x^2$
(3) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definita da $f(x) := x^2$
(4) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definita da $f(x) := 2x$

Esercizio 4. Sia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'applicazione definita da $f : n \mapsto (n - 1, 1)$. E' iniettiva? E' suriettiva?

Sia poi $g : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ l'applicazione definita da $g : (a, b) \mapsto a + b$. E' iniettiva? E' suriettiva?

Infine, si provi che $g \circ f = id_{\mathbb{Z}}$ mentre $f \circ g$ non è nemmeno suriettiva.

Esercizio 5. Sia $S := \{1, 2, 3\}$, e siano σ, τ le due funzioni di S in sè definite da

$$\begin{array}{lll} \sigma(1) := 2 & \sigma(2) := 3 & \sigma(3) := 1 \\ \tau(1) := 1 & \tau(2) := 3 & \tau(3) := 2 \end{array}$$

σ è iniettiva? E' suriettiva? E τ è iniettiva? E' suriettiva?

Infine, si provi che $\tau \circ \sigma \neq \sigma \circ \tau$.

Esercizio 6. Sia $\mathbb{Z}^* := \{m \in \mathbb{Z} \mid m \neq 0\}$, e sia $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \to \mathbb{Q}$ l'applicazione definita da $f : (a, b) \mapsto a/b$. E' iniettiva? E' suriettiva?

Esercizio 7. Sia $f : x \in \mathbb{R} \to 3x + 24 \in \mathbb{R}$. E' iniettiva? E' suriettiva? Qual è l'inversa?

Esercizio 8. Si consideri l'espressione algebrica $\sqrt{3(4 - x)} + 1$.

(1) Determinare il più grande sottinsieme $D \subseteq \mathbb{R}$ tale che l'espressione possa essere la legge di formazione per una funzione $f : D \to \mathbb{R}$;
(2) scrivere la funzione f così ottenuta come composizione di funzioni (reali di una variabile reale) le più semplici possibile.

Esercizio 9. Determinare l'insieme di definizione delle seguenti funzioni reali, e ove possibile stabilire se sono iniettive e/o suriettive:

(1) $f(x) = x^4 + 3$

(2) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 9}$

(3) $f(x) = \dfrac{3}{x + 1}$

(4) $f(x) = \dfrac{2x - 1}{3x + 2}$

(5) $f(x) = \dfrac{1}{x^3 + 8}$

(6) $f(x) = \dfrac{1}{x^3 - 1}$

(7) $f(x) = \dfrac{2x - 13}{x^2 + 5}$

(8) $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$

(9) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

(10) $f = h \circ g$ dove $g(x) = \dfrac{2 - x}{3x}$ e $h(x) = \sqrt{x}$

(11) $f = h \circ g$ dove $g(x) = \dfrac{2x}{x - 3}$ e $h(x) = \sqrt{x}$

(12) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x^2 - 4}}$

(13) $f = g/h$ dove $g(x) = \sqrt[4]{x}$ e $h(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$. E' possibile scrivere f come composizione di funzioni più semplici?

(14) $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$. E' possibile scrivere f come composizione di funzioni più semplici?

(15) $f(x) = \sqrt{x - 2} + \dfrac{1}{\sqrt{1 - x}}$

(16) $f(x) = \sqrt{x - 2} + \dfrac{1}{\sqrt{x - 2}}$. E' possibile scrivere f come composizione di funzioni più semplici?