

ESERCIZI SU LOGICA E INSIEMISTICA

(V. 1.0)

VINCENZO C. NARDOZZA

1. LOGICA

Esercizio 1.1.

Decidere quali tra le seguenti sono proposizioni:

- (1) nel 1990 George W. Bush era presidente degli Stati Uniti;
- (2) $x + 3$ è un intero positivo
- (3) se solo ogni mattina fosse soleggiata e limpida come questa!
- (4) quindici è un numero pari
- (5) se Jennifer arriverà tardi alla festa, suo cugino George si arrabbierà moltissimo!
- (6) Che ore sono?
- (7) Dalle sale di Montezuma alle spiagge di Tripoli.

Esercizio 1.2.

Quali di queste affermazioni sono proposizioni? Quali sono i valori di verità di quelle che sono proposizioni?

- (1) Boston è la capitale del Massachusetts;
- (2) Miami è la capitale della Florida;
- (3) $2 + 3 = 5$;
- (4) $5 + 7 = 10$;
- (5) $x + 2 = 11$;
- (6) Rispondi a questa domanda;
- (7) $x + y = y + x$ per ogni coppia di numeri reali x e y .

Esercizio 1.3.

Qual è la negazione di ognuna delle seguenti proposizioni?

- (1) Oggi è giovedì;
- (2) non c'è inquinamento in New Jersey;
- (3) $2 + 1 = 3$;
- (4) L'estate in Maine è calda e assolata.

Esercizio 1.4.

Siano p e q le proposizioni

- p : Questa settimana ho comprato un biglietto della lotteria
 q : Ho vinto il milione di dollari di jackpot di venerdì.

Esprimere ciascuna delle proposizioni seguenti in lingua corrente:

- | | | |
|-------------------------|-------------------------------|--------------------------------|
| a) $\neg p$ | b) $p \wedge q$ | c) $p \Rightarrow q$ |
| d) $p \vee q$ | e) $p \iff q$ | f) $\neg p \Rightarrow \neg q$ |
| g) $\neg p \vee \neg q$ | h) $\neg p \vee (p \wedge q)$ | |

Esercizio 1.5.

Siano p e q le proposizioni

p : siamo sottozero

q : sta nevicando

Scrivere le seguenti proposizioni usando p , q e i connettivi logici:

- (1) Stiamo sottozero e sta nevicando;
- (2) stiamo sottozero ma non nevica;
- (3) non siamo sottozero e non sta nevicando;
- (4) o sta nevicando o siamo sottozero
- (5) se siamo sottozero sta anche nevicando;
- (6) o siamo sottozero o sta nevicando, ma se siamo sottozero non sta nevicando;
- (7) essere sottozero è necessario e sufficiente perchè stia nevicando.

Esercizio 1.6.

Siano p e q proposizioni. Sapendo che $p \Rightarrow q$ è falsa, decidere il valore logico delle seguenti proposizioni:

- (1) $p \wedge q$
- (2) $\neg p \vee q$
- (3) $q \Rightarrow p$
- (4) $\neg q \Rightarrow \neg p$.

Esercizio 1.7.

Si considerino le seguenti proposizioni elementari:

- p: finisco di scrivere il mio esercizio di programmazione prima di pranzo;
 q: giocherò a tennis nel pomeriggio;
 r: splende il sole;
 s: c'è una bassa umidità.

Esprimere le seguenti proposizioni in modo formale:

- (1) se il sole splende, giocherò a tennis nel pomeriggio;
- (2) finire di scrivere il mio esercizio di programmazione prima di pranzo è necessario per giocare a tennis nel pomeriggio;
- (3) bassa umidità e sole che splende è sufficiente per poter giocare a tennis nel pomeriggio.

Esercizio 1.8.

Considerata la seguente indicazione: **scrivere un numero di cinque cifre, tutte pari e a due a due distinte**, decidere il valore logico delle seguenti proposizioni:

- (1) Il numero 24680 può essere scelto
- (2) Il numero 24268 può essere scelto
- (3) Il numero *quattromilaseicentoventotto* NON può essere scelto
- (4) Il numero 46218 può essere scelto.

Esercizio 1.9.

Determinare se le seguenti bicondizionali sono vere o false:

- (1) $2 + 2 = 4$ se e solo se $1 + 1 = 2$;
- (2) $1 + 1 = 2$ se e solo se $2 + 3 = 4$;
- (3) è inverno se e solo se non è estate, primavera o autunno;
- (4) $1 + 1 = 3$ se e solo se gli asini volano;
- (5) $0 > 1$ se e solo se $2 > 1$.

Esercizio 1.10.

Stabilire il valore di verità di ciascuna delle seguenti proposizioni:

- (1) se $1 + 1 = 2$ allora $2 + 2 = 5$;
- (2) se $1 + 1 = 3$ allora $2 + 2 = 4$;
- (3) se $1 + 1 = 3$ allora $2 + 2 = 5$;
- (4) se gli asini volano, allora $1 + 1 = 3$;
- (5) se $1 + 1 = 3$ allora gli asini volano;
- (6) se $1 + 1 = 2$ allora gli asini volano;
- (7) se $2 + 2 = 4$ allora $1 + 2 = 3$.

Esercizio 1.11.

Riformulare ciascuna delle seguenti implicazioni nella forma $p \Rightarrow q$:

- (1) E' necessario lavare la macchina del capo per avere una promozione;
- (2) venti da sud implicano il disgelo primaverile;
- (3) una condizione sufficiente perchè la garanzia sia valida è che tu abbia acquistato il computer meno di un anno fa;
- (4) Willy viene scoperto quando bara;
- (5) puoi accedere al sito web solo se hai pagato una quota d'iscrizione;
- (6) l'essere eletti consegue dal conoscere le persone giuste;
- (7) Carol ha il mal di mare non appena sale in barca;
- (8) nevica ogni volta che il vento soffia da nordest;
- (9) il melo fiorirà se ci sarà caldo per una settimana;
- (10) se guiderai per più di 400 Km, avrai bisogno di fare benzina;
- (11) la tua garanzia è valida solo se hai comperato il lettore CD meno di 90 giorni fa;
- (12) ricorderò di mandarti l'indirizzo solo se mi manderai un sms;
- (13) il fatto che tu abbia ottenuto il lavoro implica che le tue credenziali siano state le migliori;
- (14) la spiaggia viene erosa ogni volta che c'è un temporale;
- (15) è necessario avere una password solida per avere accesso al server.

Esercizio 1.12.

Assegnata la frase **Si selezionino i numeri di quattro cifre minori o uguali a 4789. Tra essi, si selezionino poi quelli costituiti da cifre tutte dispari**, stabilire se sono vere le proposizioni

- (1) il numero 315 va selezionato in entrambe le richieste;
- (2) il numero 3567 va selezionato nel primo caso e non nel secondo;
- (3) il numero 5379 va selezionato solo per la seconda richiesta;
- (4) il numero 1797 va selezionato per la prima richiesta, ma non nella seconda.

Esercizio 1.13.

Assegnata la frase: **considerati i numeri strettamente minori di 3469, selezionare tra essi quelli contenuti almeno una cifra dispari e al più una cifra pari**, stabilire se le seguenti proposizioni sono vere o false:

- (1) Il numero 436 deve essere preso in considerazione
- (2) Il numero 3576 deve essere preso in considerazione
- (3) Il numero 1357 deve essere preso in considerazione
- (4) Il numero 2468 deve essere preso in considerazione

Esercizio 1.14.

Si consideri la proposizione: *Il cellulare di Giovanni ha 128 GB di spazio e la telecamera da 12MP*. Se questa proposizione è falsa, deduciamo che

- (1) Il cellulare di Giovanni ha 64 GB di spazio e telecamera da 8MP;
- (2) Il cellulare di Giovanni non ha 128 GB di spazio e non ha la telecamera da 12MP;
- (3) Il cellulare di Giovanni o non ha 128 GB di spazio o non ha la telecamera da 12MP;
- (4) Il cellulare di Giovanni ha 64 GB di spazio o la telecamera da 8MP.

Esercizio 1.15.

Ciro ha un computer con 1 TB di HD o 16GB di RAM. Se questa affermazione è falsa, deduciamo che

- (1) il computer di Ciro non ha 1 TB di HD e non ha 16 GB di RAM;
- (2) il computer di Ciro ha 500 GB di HD o 8 GB di RAM;
- (3) il computer di Ciro ha 500 GB di HD e 8 GB di RAM;
- (4) il computer di Ciro non ha 1 TB di HD o non ha 16 GB di RAM.

Esercizio 1.16.

Ogni Venerdì vado in piscina e al pub. Se questa affermazione è falsa, deduciamo che

- (1) tutti i giorni vado in piscina e al pub;
- (2) qualche Venerdì non vado nè in piscina nè al pub.
- (3) qualche Venerdì non vado in piscina o non vado al pub.
- (4) ogni Venerdì non vado nè in piscina è al pub.

Esercizio 1.17.

Se un animale ha 4 zampe allora l'animale è un gatto equivale a dire

- (1) Se un animale è un gatto, allora ha 4 zampe
- (2) Affinchè un animale sia un gatto, è necessario che abbia 4 zampe.
- (3) Un animale è un gatto solo se ha 4 zampe.
- (4) Affinchè un animale sia un gatto, è sufficiente che abbia 4 zampe.

Esercizio 1.18.

Consideriamo le seguenti affermazioni: *Se oggi dormo, domani andrò in palestra; se oggi non dormo domani sarò stanco*. Se queste sono entrambe vere e domani non andrò in palestra cosa possiamo concludere?

- (1) Anche se oggi dormo domani sarò stanco.
- (2) Domani andrò in palestra e domani sarò stanco.
- (3) Domani sarò stanco.
- (4) Oggi dormo.

Esercizio 1.19.

In un piccolo villaggio sperduto, i pochi abitanti hanno una particolarità: alcuni di essi dicono sempre la verità, altri mentono sempre. Inoltre ciascuno di essi risponde solo alla prima domanda posta da uno sconosciuto, solo con un sì o con un no.

Un turista vuole raggiungere delle antiche rovine nelle vicinanze del villaggio, ma arriva a un bivio senza indicazioni. Sa che una delle due strade porta alle rovine, ma l'altra porta nel profondo della giungla. Per fortuna (?) al bivio c'è un abitante del villaggio e, sapendo che avrà in risposta un sì o un no all'unica domanda che può fare, pone al villico la seguente:

“se ti chiedessi se la strada a destra porta alle rovine, mi risponderesti di sì?”

Ottiene in risposta un *no*. Deve andare a destra, a sinistra o aspettare di incontrare qualche altro villico per poter fare una seconda domanda?

Esercizio 1.20.

Un esploratore è stato catturato da un gruppo di cannibali. In questa tribù, ci sono solo due tipi di cannibali: quelli che dicono sempre la verità e quelli che mentono sempre. Però, la tribù dà sempre la possibilità agli esploratori catturati di scampare la morte: bisogna indovinare a quale tipo appartiene il capo tribù, con una sola domanda.

- (1) Spiegare perchè la domanda *“tu menti?”* non è utile;
- (2) suggerire all'esploratore una domanda da formulare al capo tribù per salvarsi la vita!

Esercizio 1.21.

I seguenti quesiti sono relativi agli abitanti dell'isola *dei Cavalieri e dei Furfanti* creata da Smullyan, in cui i Cavalieri dicono sempre la verità e i Furfanti mentono sempre. Incontri due abitanti dell'isola, *A* e *B*. Determina il loro tipo o, se ciò è impossibile in base alle informazioni avute, cerca comunque di arrivare a qualche conclusione.

- (1) *A* dice *“Almeno uno di noi è un Furfante”*, *B* non dice nulla;
- (2) *A* dice *“Entrambi siamo Cavalieri”* e *B* dice *“A è un Furfante”*;
- (3) *A* dice *“Io sono un Furfante e B è un Cavaliere”* e *B* non dice nulla;
- (4) Sia *A* che *B* dicono *“Io sono un Cavaliere”*.
- (5) *A* dice *“Siamo entrambi Furfanti”* e *B* non dice nulla.

Esercizio 1.22.

Stabilire il valore di verità di ciascuna delle seguenti affermazioni:

- (1) $\forall x \in \mathbb{R} \ x^2 > 0$;
- (2) $\forall x \in \mathbb{R} \ x = 2$;
- (3) $\forall x \in \mathbb{R} \ x > 0$;
- (4) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} \ x = y^2$;
- (5) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} \ x = y^2 + 1$;
- (6) $\forall x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N} \ x^2 = y^2 + 1$;
- (7) $\exists x \in \mathbb{R} \ -x > 0$;
- (8) $\exists x \in \mathbb{R} \ x^2 = 5$;
- (9) $\exists x \in \mathbb{N} \ x^2 = 7$;
- (10) $\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{R} \ x^2 - y^2 = 1$;
- (11) $\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{R} \ x^2 < y^2$;
- (12) $\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{R} \ x^2 = y$;
- (13) $\exists x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} \ xy = 1$;
- (14) $\exists x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} \ x(y - 1) = 2$;
- (15) $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} \ x^2 = y^2 - 1$;
- (16) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} \exists z \in \mathbb{R} \ xyz = 1$;

$$(17) \forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} \exists z \in \mathbb{R} \quad xy + z = 1;$$

$$(18) \forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} \exists z \in \mathbb{R} \quad xy - z = 1.$$

Esercizio 1.23.

Sia $P(x)$ il predicato $x \leq 4$. Quali sono i valori di verità di $P(0)$, $P(4)$ e $P(6)$?

Esercizio 1.24.

Sia $P(x)$ il predicato “la parola x contiene la lettera a ”. Quali sono i valori di verità di $P(\text{arancia})$, $P(\text{limone})$, $P(\text{vero})$, $P(\text{falso})$?

Esercizio 1.25. Sia $P(x)$ il predicato $x \leq 4$. Quali sono i valori di verità di $P(0)$, $P(4)$ e $P(6)$?

Esercizio 1.26.

Sia $P(x)$ l’affermazione “ $x = x^2$ ”. Se l’universo del discorso consiste degli interi, quali sono i valori di verità di

$$a) P(0)$$

$$b) P(1)$$

$$c) P(2)$$

$$d) P(-1)$$

$$e) \exists x P(x)$$

$$f) \forall x P(x)$$

Esercizio 1.27.

Si consideri l’affermazione *Non c’è nave senza ancora*. Da questa affermazione deduciamo che

- (1) qualche nave ha almeno un’ancora;
- (2) nessuna nave ha due ancore;
- (3) qualche nave non ha l’ancora.
- (4) ogni nave ha almeno un’ancora.

Esercizio 1.28.

Si consideri la proposizione *Ogni giorno c’è il sole*; qual è la sua negazione?

- (1) tutti i giorni c’è il sole.
- (2) tutti i giorni non c’è il sole.
- (3) esiste un giorno in cui c’è il sole.
- (4) esiste un giorno in cui non c’è il sole.

Esercizio 1.29.

Si consideri la proposizione: *Esiste un numero reale strettamente positivo*. Qual è la sua negazione?

- (1) Esiste lo zero;
- (2) Tutti i numeri non sono strettamente positivi;
- (3) Tutti i numeri sono non negativi;
- (4) Esiste un numero non strettamente positivo.

Esercizio 1.30.

Stabilire se la proposizione

$$\forall x \in \mathbb{N} \quad \exists y \in \mathbb{N} \quad \text{tale che } x + y - 5 = 0$$

è vera o falsa, e scriverne la negazione.

Esercizio 1.31.

Sia $P(x)$ il predicato “lo studente x ogni fine settimana trascorre più di cinque ore a studiare”, e l’universo del discorso per x consiste nell’insieme degli studenti. Esprimere in linguaggio corrente le seguenti proposizioni:

- (1) $\exists x P(x)$;
- (2) $\forall x P(x)$;
- (3) $\exists x \neg P(x)$;
- (4) $\forall x \neg P(x)$.

Esercizio 1.32.

Sia $C(x)$ l'affermazione x ha un gatto, $D(x)$ quella x ha un cane, $F(x)$ quella x ha un furetto. L'universo del discorso per x è formato dagli studenti della vostra classe. Esprimete formalmente le seguenti affermazioni:

- (1) uno studente della vostra classe ha un gatto, un cane e un furetto;
- (2) tutti gli studenti della vostra classe hanno un cane, un gatto o un furetto;
- (3) qualche studente della vostra classe ha un gatto e un furetto, ma non un cane;
- (4) nessuno studente della vostra classe ha un cane, un gatto e un furetto;
- (5) per ognuno dei tre animali, cane, gatto e furetto, c'è uno studente della vostra classe che possiede uno di essi come animalletto domestico.

Esercizio 1.33.

Sia $Q(x)$ l'affermazione $x + 1 > x$. Se l'universo del discorso consiste di tutti gli interi, quali sono i valori di verità di:

- | | | |
|--------------------------|---------------------|--------------------------|
| a) $Q(0)$ | b) $Q(-1)$ | c) $Q(1)$ |
| d) $\exists x Q(x)$ | e) $\forall x Q(x)$ | f) $\exists x \neg Q(x)$ |
| g) $\forall x \neg Q(x)$ | | |

Esercizio 1.34.

Determinare il valore di verità di ciascuna delle seguenti proposizione, se l'universo del discorso consiste di tutti i numeri interi:

- (1) $\forall n (n + 1 > n)$;
- (2) $\exists n (2n = 3n)$;
- (3) $\exists n (n = -n)$;
- (4) $\forall n (n^2 \geq n)$.

Esercizio 1.35.

Tradurre formalmente, usando predicati, quantificatori e connettivi, ciascuna delle seguenti frasi in due modi: dapprima assumendo come universo del discorso l'insieme degli studenti della vostra classe, e poi l'insieme di tutte le persone.

- (1) qualcuno nella vostra classe parla inglese;
- (2) ciascuno nella vostra classe è amichevole;
- (3) c'è qualcuno nella vostra classe che non è nato in Veneto;
- (4) uno studente della vostra classe è apparso in un film;
- (5) nessuno nella vostra classe ha seguito un corso di programmazione logica;
- (6) chiunque nella vostra classe ha un cellulare;
- (7) qualcuno nella vostra classe ha visto un film straniero in lingua originale;
- (8) c'è una persona nella vostra classe che non sa nuotare;
- (9) tutti gli studenti nella vostra classe sanno risolvere un'equazione quadratica;
- (10) qualche studente nella vostra classe non vuole essere ricco;

Esercizio 1.36.

Tradurre ciascuna delle seguenti affermazioni in espressioni logiche usando predicati, quantificatori e connettivi logici:

- (1) Nessuno è perfetto;
- (2) non tutti sono perfetti;
- (3) tutti i tuoi amici sono perfetti;
- (4) uno dei tuoi amici è perfetto;
- (5) chiunque è tuo amico ed è perfetto;
- (6) non tutti sono tuoi amici o qualcuno non è perfetto.

Esercizio 1.37.

Tradurre ciascuna delle seguenti affermazioni in espressioni logiche usando predicati, quantificatori e connettivi logici, e successivamente formarne la negazione:

- (1) Tutti i cani hanno le pulci;
- (2) C'è un cavallo che sa fare le addizioni;
- (3) Tutti i koala sanno arrampicarsi;
- (4) non ci sono scimmie che parlano francese;
- (5) c'è un maiale che sa nuotare e pescare;
- (6) ci sono cani vecchi che imparano trucchi nuovi;
- (7) nessun coniglio sa fare i calcoli;
- (8) ogni uccello sa volare;
- (9) non ci sono cani che sanno parlare;
- (10) nessuno in questa classe conosce il Francese e il Russo;
- (11) alcuni automobilisti non rispettano il limite di velocità;
- (12) tutti i film svedesi sono seri;
- (13) nessuno è capace di mantenere un segreto;
- (14) c'è qualcuno in questa classe che non ha un atteggiamento positivo.

Esercizio 1.38.

Trovare se possibile un controesempio a ciascuna delle seguenti affermazioni, se l'universo del discorso è l'insieme dei numeri interi:

- a) $\forall x (x^2 \geq x)$
- b) $\forall x (x > 0 \vee x < 0)$
- c) $\forall x (x = 1)$

Esercizio 1.39.

Trovare se possibile un controesempio a ciascuna delle seguenti affermazioni, se l'universo del discorso è l'insieme dei numeri reali:

- a) $\forall x (x^2 \neq x)$
- b) $\forall x (x^2 \neq 2)$
- c) $\forall x (|x| > 0)$

Esercizio 1.40.

Stabilire se la proposizione

$$\forall c \in \mathbb{Q} \quad \exists d \in \mathbb{Q} \quad \text{tale che } cd = 5$$

è vera o falsa, e scrivere la sua negazione.

Esercizio 1.41.

Stabilire se la proposizione

$$\forall c \in \mathbb{Q}, c \neq 0 \quad \exists d \in \mathbb{Q} \quad \text{tale che } cd = 5$$

è vera o falsa, e scrivere la sua negazione.

Esercizio 1.42.

Stabilire se la proposizione

$$\exists v \in \mathbb{Q}, \text{ tale che } \forall u \in \mathbb{Q} \quad vu = 5$$

è vera o falsa, e scrivere la sua negazione.

Esercizio 1.43.

Stabilire se la seguente proposizione

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \exists c \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R} \quad a = 2c^2 + 4b^4$$

è vera o falsa, e scriverne la negazione.

Esercizio 1.44.

Stabilire se la seguente proposizione

$$\forall a \in \mathbb{N} \quad \exists y \in \mathbb{Z} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad 2ay = n$$

è vera o falsa, e scriverne la negazione.

Esercizio 1.45.

Stabilire se la seguente proposizione

$$\exists y \in \mathbb{R} \quad \forall r \in \mathbb{N} \quad \forall b \in \mathbb{Z} \quad y - r + b \neq 0$$

è vera o falsa, ed esibire la sua negazione.

Esercizio 1.46.

Stabilire se la proposizione

$$\forall z \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad z = x^2 - y^3$$

è vera o falsa, e scriverne la negazione.

Esercizio 1.47.

Tradurre le seguenti affermazioni in linguaggio corrente, con l'universo del discorso che consiste dei numeri reali:

- (1) $\forall x \exists y (x < y)$;
- (2) $\forall x \forall y (((x \geq 0) \wedge (y \geq 0)) \Rightarrow (xy \geq 0))$;
- (3) $\forall x \forall y \exists z (xy = z)$;
- (4) $\forall x \forall y (xy = y)$;
- (5) $\forall x \forall y (((x \geq 0) \wedge (y < 0)) \Rightarrow (x - y > 0))$;
- (6) $\forall x \forall y \exists z (x = y + z)$.

Esercizio 1.48.

Sia $L(x, y)$ l'affermazione “ x ama y ”, e l'universo del discorso per x ed y sia l'insieme di tutte le persone del mondo. Usare i quantificatori per esprimere formalmente ciascuna delle seguenti affermazioni:

- (1) Tutti amano Jerry;
- (2) tutti amano qualcuno;
- (3) c'è qualcuno che tutti amano;
- (4) nessuno ama tutti;
- (5) c'è qualcuno che Lydia non ama;
- (6) c'è qualcuno che nessuno ama;
- (7) c'è esattamente una persona che tutti amano;
- (8) ci sono esattamente due persone che Lynn ama;
- (9) tutti amano se stessi;

- (10) c'è chi non ama altri che se stesso.

Esercizio 1.49.

Esprimere ciascuna delle seguenti affermazioni usando operatori logici e matematici, predicati e quantificatori, con universo del discorso costituito dai numeri interi:

- (1) la somma di due interi negativi è negativa;
- (2) la differenza di due interi positivi non è necessariamente positiva;
- (3) la somma dei quadrati di due interi è maggiore o uguale al quadrato della loro somma;
- (4) il valore assoluto del prodotto di due interi è il prodotto dei loro valori assoluti;
- (5) il prodotto di due interi negativi è positivo;
- (6) la media di due interi positivi è positiva;
- (7) la differenza di due interi negativi non è necessariamente negativa;
- (8) il valore assoluto della somma di due interi non eccede la somma dei loro valori assoluti;
- (9) ogni intero positivo è la somma dei quadrati di quattro interi;
- (10) c'è un intero positivo che non è somma di tre quadrati.

Esercizio 1.50.

Sia $Q(x, y)$ l'affermazione " $x + y = x - y$ ". Se l'universo del discorso per ambo le variabili è l'insieme dei numeri interi, decidere il valore di verità di

- (1) $Q(1, 1)$;
- (2) $Q(2, 0)$;
- (3) $\forall y Q(1, y)$;
- (4) $\exists x Q(x, 2)$;
- (5) $\exists x \exists y Q(x, y)$;
- (6) $\forall x \exists y Q(x, y)$;
- (7) $\exists y \forall x Q(x, y)$;
- (8) $\forall y \exists x Q(x, y)$;
- (9) $\forall x \forall y Q(x, y)$.

Esercizio 1.51.

Determinare il valore di verità di ciascuna delle seguenti affermazioni, sapendo che l'universo del discorso per tutte le variabili è l'insieme dei numeri interi:

- (1) $\forall n \exists m (n^2 < m)$;
- (2) $\exists n \forall m (n < m^2)$;
- (3) $\forall n \exists m (n + m = 0)$;
- (4) $\exists n \forall m (nm = m)$;
- (5) $\exists n \exists m (n^2 + m^2 = 5)$;
- (6) $\exists n \exists m (n^2 + m^2 = 6)$;
- (7) $\exists n \exists m (n + m = 4 \wedge n - m = 1)$;
- (8) $\exists n \exists m (n + m = 4 \wedge n - m = 2)$;
- (9) $\forall n \forall m \exists p (p = (m + n)/2)$.

Esercizio 1.52.

Determinare il valore di verità di ciascuna delle seguenti affermazioni, sapendo che l'universo del discorso per tutte le variabili è l'insieme dei numeri reali:

- (1) $\forall x \exists y (x^2 = y)$;
- (2) $\forall x \exists y (x = y^2)$;

- (3) $\exists x \forall y (xy = 0)$;
- (4) $\exists x \exists y (x + y \neq y + x)$;
- (5) $\forall x (x \neq 0 \Rightarrow \exists y (xy = 1))$;
- (6) $\forall x \exists y (x + y = 1)$;
- (7) $\exists x \exists y (x + 2y = 2 \wedge 2x + 4y = 5)$;
- (8) $\forall x \exists y (x + y = 2 \wedge 2x - y = 1)$;
- (9) $\forall x \forall y \exists z (z = (x + y)/2)$.

Esercizio 1.53.

Esprimere simbolicamente le seguenti proposizioni e poi effettuarne la negazione. Infine, esprimere ciascuna di esse in lingua italiana.

- (1) Nessuno ha perso più di mille euro giocando al lotto;
- (2) c'è uno studente in questa classe che ha chiacchierato con esattamente un altro studente;
- (3) nessuno studente in questa classe ha mandato e-mail a esattamente due altri studenti di questa classe;
- (4) qualche studente ha risolto tutti gli esercizi di questa dispensa;
- (5) nessuno studente ha risolto almeno un esercizio di ogni capitolo del libro di testo di Matematica Discreta;
- (6) qualcuno ha visitato tutti i Paesi del mondo eccetto la Libia;
- (7) nessuno ha scalato tutte le vette dell'Himalaya;
- (8) ogni attore cinematografico o ha girato un film con Kevin Bacon oppure ha girato un film con un attore che ha girato un film con Kevin Bacon;
- (9) a tutti gli studenti di questa classe piace la Matematica;
- (10) c'è uno studente in questa classe che non ha mai visto un computer;
- (11) c'è uno studente di questa classe che è stato in almeno una stanza di ogni edificio del campus.

Esercizio 1.54.

Trovare se possibile un controesempio alle seguenti affermazioni, dove l'universo del discorso è l'insieme dei numeri interi:

- (1) $\forall x \forall y (x^2 = y^2 \Rightarrow x = y)$;
- (2) $\forall x \exists y (y^2 = x)$;
- (3) $\forall x \forall y (xy \geq x)$;
- (4) $\forall x \exists y (x = 1/x)$;
- (5) $\forall x \exists y (y^2 - x < 100)$;
- (6) $\forall x \forall y (x^2 \neq y^3)$.

Esercizio 1.55.

Determinare il valore logico della proposizione

$$\left((p \wedge q) \vee (p \wedge (\neg q)) \right) \wedge (\neg p)$$

in dipendenza dei valori logici di p e q .

Esercizio 1.56.

Aldo, Bruno e Carlo sono tre amici, e sappiamo che

- (1) almeno uno di loro è di Bari;
- (2) se Aldo è di Bari, anche Bruno è di Bari;
- (3) se Carlo è di Bari, anche Aldo è di Bari;
- (4) solo uno tra Bruno e Carlo è di Bari.

Quali tra le seguenti affermazioni sono deducibili da queste informazioni?

- | | |
|-------------------------------|--|
| (A) Aldo e Bruno sono di Bari | (D) Bruno è di Bari e Aldo no |
| (B) Bruno è di Bari | (E) Esattamente due di loro sono di Bari |
| (C) Carlo è di Bari | (F) solo uno di loro è di Bari |

Esercizio 1.57.

Su un tavolo ci sono N gettoni. Metà di essi sono rossi, l'altra metà blu. Inoltre, metà di essi sono rotondi, gli altri quadrati. Possiamo allora dedurre che

- (1) Ci sono tanti gettoni quadrati blu quanti rotondi rossi;
- (2) c'è lo stesso numero di gettoni, qualunque sia il tipo;
- (3) il numero N è un multiplo di 4;
- (4) il numero di gettoni quadrati blu è uguale al numero di gettoni quadrati rossi;
- (5) il numero di gettoni rotondi rossi è uguale al numero di gettoni quadrati rossi.

Esercizio 1.58.

In una scatola ci sono 10 cubi, e ciascuna faccia di ciascuno di essi è colorata o di verde, o di bianco, o di rosso. Sapendo che

- esattamente 9 cubi hanno almeno una delle facce colorata di verde,
- esattamente 7 cubi hanno almeno una delle facce colorata di bianco,
- esattamente 6 cubi hanno almeno una delle facce colorata di rosso,
- nessun cubo ha tutte le sue facce colorate con lo stesso colore,

quanti sono i cubi le cui facce presentano tutti e tre i colori?