

**Esercizio 1.**

Spiegare perchè

$$\{x \mid x \text{ è divisibile per } u\} = \{y \mid y \text{ è divisibile per } u\}$$

mentre

$$\{x \mid x \text{ è divisibile per } y\} \neq \{y \mid y \text{ è divisibile per } y\}.$$

**Esercizio 2.**

Quali dei seguenti insiemi sono uguali?

$$A = \{1, 2, 3\}, B = \{3, 2, 1, 3\}, C = \{3, 1, 2, 3\}, D = \{1, 2, 2, 3\}.$$

**Esercizio 3.**

Spiegare perchè è vero che

$$\{y \mid \text{esiste un intero } x \text{ tale che } y = 2x\} = \{2x \mid x \in \mathbb{Z}\}.$$

**Esercizio 4.**

Sia  $A = \{1, \{1\}, \{2\}\}$ . Quale delle seguenti affermazioni sono vere?

$$a) 1 \in A \quad b) \{1\} \in A \quad c) \{1\} \subseteq A \quad d) \{\{1\}\} \subseteq A$$

$$e) \{2\} \in A \quad f) \{2\} \subseteq A \quad g) \{\{2\}\} \subseteq A \quad h) \{\{2\}\} \subsetneq A$$

E se invece  $A = \{1, 2, \{2\}\}$ ?

**Esercizio 5.** Per quali  $A \subseteq \mathbb{N}$  risulta  $A \subseteq ]2, 5[$ ?

**Esercizio 6.**

Determinare se le seguenti affermazioni sono vere o false

- (1)  $0 \in \{\emptyset\}$
- (2)  $\emptyset \in \{0\}$
- (3)  $\{0\} \subseteq \emptyset$
- (4)  $\emptyset \subseteq \{0\}$
- (5)  $\{0\} \in \{0\}$
- (6)  $\{0\} \subseteq \{0\}$ ;
- (7)  $\{\emptyset\} \subseteq \{\emptyset\}$
- (8)  $\emptyset \in \{\emptyset\}$
- (9)  $\emptyset \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
- (10)  $\{\emptyset\} \in \{\emptyset\}$
- (11)  $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\}$
- (12)  $\{\emptyset\} \subseteq \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
- (13)  $\{\{\emptyset\}\} \subseteq \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}$
- (14)  $\{\{\emptyset\}\} \subseteq \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$
- (15)  $x \in \{x\}$
- (16)  $\{x\} \subseteq \{x\}$
- (17)  $\{x\} \in \{x\}$
- (18)  $\{x\} \in \{\{x\}\}$
- (19)  $\emptyset \subseteq \{x\}$
- (20)  $\emptyset \in \{x\}$ .

**Esercizio 7.**

Elencare gli elementi dei seguenti insiemi:

- (1)  $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 1\}$ ;
- (2)  $\{x \mid x \text{ è un intero positivo } < 12\}$ ;

- (3)  $\{x \mid x \text{ è il quadrato di un intero e } x < 100\}$ ;  
 (4)  $\{x \mid x \text{ è un intero tale che } x^2 = 2\}$ .

**Esercizio 8.**

Determinare tutti gli elementi in ciascuno dei seguenti insiemi:

- (1)  $\{1 + (-1)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ;  
 (2)  $\{n^3 + n^2 \mid n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}\}$ ;  
 (3)  $\{1/(n^2 + n) \mid n \text{ è un intero positivo dispari e } n \leq 11\}$ ;  
 (4)  $\{n + (1/n) \mid n \in \{1, 2, 3, 5, 7\}\}$ .

**Esercizio 9.**

Per ciascuno dei seguenti insiemi, stabilire se 2 è un elemento dell'insieme:

- (1)  $\{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ è un intero maggiore di } 1\}$ ;  
 (2)  $\{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ è il quadrato di un intero}\}$ ;  
 (3)  $\{2, \{2\}\}$ ;  
 (4)  $\{\{2\}, \{\{2\}\}\}$ ;  
 (5)  $\{\{2\}, \{2, \{2\}\}\}$ ;  
 (6)  $\{\{\{2\}\}\}$ .

**Esercizio 10.**

Scrivere almeno 10 elementi dell'insieme  $\{x^2 \mid x \in \mathbb{Z}\}$ .

**Esercizio 11.**

Scrivere almeno 10 elementi dell'insieme  $\{(2x, 3x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ .

**Esercizio 12.**

Dare un esempio di tre insiemi  $A, B, C$  tali che  $A \in B$ ,  $B \in C$  ma  $A \notin C$ .

**Esercizio 13.**

Scrivere almeno 10 elementi dell'insieme

$$\left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid a + b = 1 \text{ e } a, b \in \mathbb{Q} \right\}.$$

**Esercizio 14.**

Scrivere qualche elemento dell'insieme

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x \text{ e } y = 3x\}.$$

**Esercizio 15.**

Siano dati gli oggetti  $a, b, c, d$ , non necessariamente distinti, provare che

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\} \iff a = c \text{ e } b = d.$$

**Esercizio 16.**

Si considerino i seguenti sei sottinsiemi di  $\mathbb{Z}$ :

$$\begin{aligned} A &= \{2m + 1 \mid m \in \mathbb{Z}\} & B &= \{2n + 3 \mid n \in \mathbb{Z}\} & C &= \{2p - 3 \mid p \in \mathbb{Z}\} \\ D &= \{3r + 1 \mid r \in \mathbb{Z}\} & E &= \{3s + 2 \mid s \in \mathbb{Z}\} & F &= \{3t - 2 \mid t \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

Quale delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono invece false?

- a)  $A = B$                       b)  $A = C$                       c)  $B = C$   
 d)  $D = E$                       e)  $D = F$                       f)  $E = F$ .

**Esercizio 17.**

Quali dei seguenti insiemi sono non vuoti?

- a)**  $\{x \mid x \in \mathbb{N}, 2x + 7 = 3\}$                       **b)**  $\{x \in \mathbb{Z} \mid 3x + 5 = 9\}$   
**c)**  $\{x \mid x \in \mathbb{Q}, x^4 + 4 = 6\}$                       **d)**  $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 4 = 6\}$   
**e)**  $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x^2 + 5 = 4\}$                       **f)**  $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 3x + 3 = 0\}$   
**g)**  $\{x \mid x \in \mathbb{C}, x^2 + 3x + 3 = 0\}$

**Esercizio 18.**

Verificare ciascuna delle seguenti affermazioni:

- (1)  $\{x \in \mathbb{Z} \mid \text{esiste un intero } y \text{ tale che } x = 6y\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid \text{esistono degli interi } u \text{ e } v \text{ tali che } x = 2u \text{ e } x = 3v\}$   
(2)  $\{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in \mathbb{R} \text{ tale che } x = y^2\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$   
(3)  $\{x \in \mathbb{Z} \mid \text{per un opportuno intero } y \text{ è } x = 6y\} \subseteq \{x \in \mathbb{Z} \mid \text{per un opportuno intero } y \text{ è } x = 2y\}$ .

**Esercizio 19.**

Siano  $A, B, C, D, E$  i seguenti sottinsiemi dell'insieme  $\mathbb{Z}$ , visto come insieme universo:

$$\begin{aligned}
A &= \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\} & B &= \{3n \mid n \in \mathbb{Z}\} & C &= \{4n \mid n \in \mathbb{Z}\} \\
D &= \{6n \mid n \in \mathbb{Z}\} & E &= \{8n \mid n \in \mathbb{Z}\}
\end{aligned}$$

- (1) Quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false?

$$\begin{aligned}
i) E \subseteq C \subseteq A & & ii) A \subseteq C \subseteq E & & iii) B \subseteq D \\
iv) D \subseteq B & & v) D \subseteq A & & vi) \mathcal{C}(D) \subseteq \mathcal{C}(A)
\end{aligned}$$

- (2) Determinare ognuno dei seguenti insiemi:

$$\begin{aligned}
i) C \cap E & & ii) B \cup D & & iii) A \cap B \\
iv) B \cap D & & v) \mathcal{C}(A) & & vi) A \cap E
\end{aligned}$$

**Esercizio 20.**

Assegnati degli insiemi  $A, B$  e  $C$ , provare ognuna delle seguenti affermazioni:

- (1)  $A \subseteq B$  e  $B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$ ;  
(2)  $A \subseteq B$  e  $B \subsetneq C \Rightarrow A \subsetneq C$ ;  
(3)  $A \subsetneq B$  e  $B \subseteq C \Rightarrow A \subsetneq C$ ;  
(4)  $A \subsetneq B$  e  $B \subsetneq C \Rightarrow A \subsetneq C$ .

**Esercizio 21.**

Dare un esempio di insiemi  $A, B, C, D, E$  che soddisfano tutte le seguenti condizioni simultaneamente:

$$A \subsetneq B, B \in C, C \subsetneq D, D \subsetneq E.$$

**Esercizio 22.**

Quali delle seguenti sono vere per tutti gli insiemi  $A, B$  e  $C$ ?

- (1) Se  $A \notin B$  e  $B \notin C$  allora  $A \notin C$ ;  
(2) se  $A \neq B$  e  $B \neq C$  allora  $A \neq C$ ;  
(3) se  $A \in B$  e  $B \not\subseteq C$  allora  $A \notin C$ ;

- (4) se  $A \subsetneq B$  e  $B \subseteq C$  allora  $C \not\subseteq A$ ;  
 (5) se  $A \subseteq B$  e  $B \in C$  allora  $A \notin C$ .

**Esercizio 23.**

Provare che per ogni insieme  $A$  risulta  $A \subseteq \emptyset \iff A = \emptyset$ .

**Esercizio 24.**

Dato un insieme universo  $U$ , siano  $A, B \subseteq U$ . Chi è  $(A \setminus B) \cap (B \setminus A)$ ? Provare la propria affermazione.

**Esercizio 25.**

Siano  $A_1, \dots, A_n$  insiemi. Provare che

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_n \subseteq A_1 \iff A_1 = A_2 = \dots = A_n.$$

**Esercizio 26.**

Provare che per ogni  $A, B$  insiemi risulta

$$\emptyset \subseteq A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B.$$

**Esercizio 27.**

Fissiamo  $\mathbb{Z}$  come insieme universo, e consideriamo i suoi sottinsiemi

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{Z} \mid \text{per qualche intero positivo } y, x = 2y\} \\ B &= \{x \in \mathbb{Z} \mid \text{per qualche intero positivo } y, x = 2y - 1\} \\ C &= \{x \in \mathbb{Z} \mid x < 10\}. \end{aligned}$$

Descrivere gli insiemi  $\mathcal{C}(A)$ ,  $\mathcal{C}(A \cup B)$ ,  $A \setminus \mathcal{C}(C)$  e  $C \setminus \mathcal{C}(A \cup B)$ .

**Esercizio 28.**

Indichiamo con  $\mathbb{Z}^+$  l'insieme degli interi positivi, e consideriamone i seguenti sottinsiemi:

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{Z}^+ \mid \text{per qualche intero } y, x = 2y\} \\ B &= \{x \in \mathbb{Z}^+ \mid \text{per qualche intero } y, x = 2y + 1\} \\ C &= \{x \in \mathbb{Z}^+ \mid \text{per qualche intero } y, x = 3y\}. \end{aligned}$$

- (1) Descrivere  $A \cap C$ ,  $B \cup C$  e  $B \setminus C$ ;
- (2) verificare che  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ .

**Esercizio 29.**

Se  $A$  è un qualunque insieme, chi sono i seguenti insiemi?

$$A \cap \emptyset, A \cup \emptyset, A \setminus \emptyset, A \setminus A, \emptyset \setminus A.$$

**Esercizio 30.**

Determinare gli insiemi  $\emptyset \cap \{\emptyset\}$ ,  $\{\emptyset\} \cap \{\emptyset\}$ ,  $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \setminus \emptyset$ ,  $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \setminus \{\emptyset\}$ ,  $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \setminus \{\{\emptyset\}\}$ .

**Esercizio 31.**

Sia  $U$  l'insieme universo, e indichiamo con  $A, B$  degli insiemi. Provare che

- (1)  $(\forall A \ A \cup B = A) \iff B = \emptyset$ ;
- (2)  $(\forall A \ A \cap B = A) \iff B = U$ ;
- (3) se  $A \cup B = U$  e  $A \cap B = \emptyset$  allora  $B = \mathcal{C}(A)$ .

**Esercizio 32.**

Siano  $A$  e  $B$  degli insiemi. Provare che le seguenti tre affermazioni sono tra loro equivalenti:

- (1)  $A \subseteq B$ ;
- (2)  $A \cup B = B$ ;
- (3)  $A \cap B = A$ .

**Esercizio 33.**

Sia  $U := \mathbb{R}$  l'insieme universo, e sia  $\mathcal{I} = \mathbb{N}^*$ . Per ogni  $n \in \mathcal{I}$ , sia  $A_n := [-2n, 3n]$ . Determinare ciascuno dei seguenti insiemi:

- a)  $A_3$                       b)  $A_4$                       c)  $A_3 \setminus A_4$                       d)  $(A_3 \setminus A_4) \cup (A_4 \setminus A_3)$
- e)  $\bigcup_{n=1}^7 A_n$                       f)  $\bigcap_{n=1}^7 A_n$                       g)  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$                       h)  $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ .

**Esercizio 34.** Siano  $A := [1, +\infty[$ ,  $B := ] - \infty, -3[$ ,

$$C := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{x-1}{x+3} \geq 0 \right\}, \quad D := \{x \in \mathbb{R} \mid (x-1)(x+3) \geq 0\}.$$

Dire se  $A \cup B = C$  o  $A \cup B = D$ .

**Esercizio 35.** Siano  $A := \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq 1\}$ ,  $B := \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3\}$ ,  $C := \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 3\}$  e  $D := \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$ . Determinare  $A \cap B$ ,  $A \cap C$  e  $A \cap D$ .