

Introduzione alla Matematica di Base

Università degli Studi di Bari

Dipartimento di Matematica

A.A. 2026/2027

Vincenzo C. Nardoza

INDICE

1. Proposizioni e operatori logici	3
1.1. Tecniche dimostrative di base	11
1.2. Variabili, indeterminate, incognite, parametri	14
1.3. Predicati	16
2. Terminologia	20
3. Gli Insiemi	23
3.1. Confronto tra insiemi	27
3.2. Nuovi insiemi a partire da insiemi dati: operazioni insiemistiche	30
3.3. Nuovi insiemi a partire da insiemi dati: l'insieme delle parti	32
3.4. Nuovi insiemi a partire da insiemi dati: il prodotto cartesiano	33

Premessa

Queste brevi note hanno lo scopo di presentare agli studenti di primo anno di un corso di laurea in Informatica i contenuti di base della Matematica in modo più dettagliato di quanto usualmente disponibile sui testi “ufficiali”, senza tuttavia andare oltre lo stretto necessario, e non hanno nessuna pretesa nè di originalità nè di completezza.

La selezione e l’esposizione dei contenuti delle note è basata non solo sull’esperienza didattica personale di chi scrive, ma anche sul confronto con i colleghi, in particolare con i docenti di Matematica Discreta.

Al centro dell’esposizione c’è la Logica Matematica, espressa in due delle sue declinazioni naturali (Logica “classica”, come calcolo proposizionale e dei predicati, e Insiemistica), e sacrificando una terza (Algebre booleane), che pure è alla base delle applicazioni pratiche (moderni computer) e rientrerà sperabilmente nell’ambito più specifico del corso di Matematica Discreta.

Osservazioni e suggerimenti, da parte di colleghi e/o studenti, sono sempre i benvenuti: ogni occasione di confronto e di dialogo è il seme del miglioramento, per sè e per gli altri.

A margine: chi scrive ha personalmente riscontrato, negli studenti dell’ultima decade, una marcata difficoltà nell’interpretare correttamente delle informazioni scritte che vadano anche solo un po’ oltre il livello di “superficialità”, per non parlare della difficoltà di esprimere correttamente un pensiero non ovvio. E’ profonda convinzione di chi scrive che la cultura (in generale, e non solo matematica) si sviluppi sulla comunicazione e, perciò, sul linguaggio in cui è espressa. In questo, la parola scritta può essere *affiancata* da altri linguaggi (video, tutorials, sunti, esposizioni etc) ma **NON** rimpiazzata. E’ per ribadire la centralità dell’uso della parola scritta che le note sono state realizzate così come sono, e non come slides riassuntive di temi, in sè stessi tutt’altro che banali ancorchè semplici.

1. PROPOSIZIONI E OPERATORI LOGICI

Si dice **proposizione** un'affermazione *dichiarativa* che ammette oggettivamente un unico valore di verità: vero o falso.

Esempio 1.1. L'affermazione *Antonio è alto 1.93m* è effettivamente una proposizione, mentre l'affermazione *Antonio è simpatico* non lo è, come non lo è l'affermazione *Antonio è alto*.

La frase *L'uomo vide una donna con un telescopio* è una proposizione?

Esercizio 1.

Decidere quali tra le seguenti sono proposizioni:

- (1) nel 1990 George W. Bush era presidente degli Stati Uniti;
- (2) $x + 3$ è un intero positivo
- (3) se solo ogni mattina fosse soleggiata e limpida come questa!
- (4) quindici è un numero pari
- (5) se Jennifer arriverà tardi alla festa, suo cugino George si arrabbierà moltissimo!
- (6) Che ore sono?
- (7) Dalle sale di Montezuma alle spiagge di Tripoli.

Esercizio 2.

Quali di queste affermazioni sono proposizioni? Quali sono i valori di verità di quelle che sono proposizioni?

- (1) Boston è la capitale del Massachusetts;
- (2) Bari è la capitale della Florida;
- (3) $2 + 3 = 5$;
- (4) $5 + 7 = 10$;
- (5) $x + 2 = 11$;
- (6) Rispondi a questa domanda;
- (7) $x + y = y + x$ per ogni coppia di numeri reali x e y .

Alcune proposizioni sono “semplici”, nel senso che non sono ulteriormente semplificabili. Per esempio, la proposizione “*4 è un numero pari*” reca un soggetto (il 4), un verbo (è) e poi una proprietà del soggetto (un numero pari). Non è possibile esprimere questa proposizione in modo più sintetico: non possiamo eliminare il soggetto, nè il verbo, nè la proprietà del soggetto, se vogliamo ottenere una frase che esprima lo stesso concetto.

La maggior parte delle proposizioni che usiamo, anche nella quotidianità, sono però in genere “composte”, cioè costruite combinando in vari modi proposizioni più semplici. Per legare proposizioni date (semplici o meno) e costruirne di nuove si usano i cosiddetti *operatori logici*. Quelli di base sono gli operatori

- **.AND.** (denotato anche con il simbolo $\wedge$) e detto *coniunzione*;
- **.OR.** (denotato anche il simbolo $\vee$) e detto *disgiunzione inclusiva*
- **.NOT.** (denotato anche con il simbolo $\neg$) detto *negazione*

(notare i/il punti/o accanto alle lettere usuali: servono a sottolineare come vanno usati). Questi tre operatori formano un sistema *funzionalmente completo*: cioè ogni proposizione composta è ottenibile componendo un numero finito di altre proposizioni tramite questi soli operatori logici.

L'effetto degli operatori logici $\wedge$, $\vee$ e $\neg$ sulle date proposizioni cui si applicano è grossomodo descritto dal significato delle parole (di lingua inglese) associate al simbolo. Tuttavia, nel nostro contesto, il loro senso è più specifico di quello del linguaggio naturale.

Esercizio 3. Le affermazioni

- (1) *Lui fece fuoco e l'uccello volò via*
 (2) *L'uccello volò via e lui fece fuoco*

vogliono dire la stessa cosa?

La definizione corretta, priva di ambiguità, di un operatore logico viene data per mezzo delle cosiddette *tavole di verità*:

Definizione 1.2. (Congiunzione)

Date le proposizioni p, q , la proposizione $p \wedge q$ ha valore di verità T esattamente quando *sia* p *sia* q hanno valore logico T, e valore logico F negli altri casi. Ciò è riassunto nella tavola di verità seguente:

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

Esempio 1.3.

Sia π (pi-greco) il numero ottenuto come rapporto tra la lunghezza di una circonferenza arbitraria e il suo diametro.

- La proposizione $(\pi > 3) \wedge (\pi < 3.2)$ è una proposizione, diversa da $\pi > 3$ e da $\pi < 3.2$, e vuol dire che il numero π è sia strettamente più grande di 3 che strettamente più piccolo di 3.2. Il suo valore di verità è T;
- $(\pi > 3) \wedge (\pi < 2)$ è un'altra proposizione, stavolta falsa. Infatti, $\pi > 3$ è vera, mentre $\pi < 2$ è falsa;
- $(\text{Lui fece fuoco}) \wedge (\text{l'uccello volò via})$, se vera, esprime SOLO il fatto che ci fu uno sparo e un uccello che volò via. Nulla ci dice sulla cronologia degli eventi, nè su eventuali rapporti di causalità.

Anche per l'operatore logico .OR. vale un discorso analogo, grossomodo legato al senso comune. Anche qui ci sono da evitare le possibili ambiguità

Esempio 1.4. Nelle affermazioni in linguaggio corrente

- oggi andrò al lavoro in macchina o in moto;
- sono previste piogge per domani o dopodomani

la funzione svolta dalla congiunzione sintattica *o* è differente: nel primo caso indica *esclusività* (delle due, l'una, ma non entrambe o nessuna), nella seconda *inclusività* (può ben darsi che piova sia domani che dopodomani).

Nel nostro contesto, l'operatore $\vee$ è detto *disgiunzione inclusiva*, e anche per lui abbiamo bisogno di dare una definizione rigorosa tramite le tavole di verità:

Definizione 1.5. (Disgiunzione inclusiva)

Date le proposizioni p, q , la proposizione $p \vee q$ ha valore di verità T solo quando *almeno una* tra p e q risulta vera, e F solo nel caso in cui sia p che q sono false. La tavola di verità di $\vee$ è

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Esempio 1.6. Siano a e b numeri reali. Dire che $(a = 0) \vee (b = 0)$ è vera (ha valore logico T) vuol dire che almeno uno tra a e b è nullo, e ciò comprende (per la definizione data) il fatto che per $a = b = 0$ il valore logico della proposizione composta $(0 = 0) \vee (0 = 0)$ è T.

Esercizio 4. La proposizione $(3 < 5) \vee (1 = 0)$ è vera o falsa?

L'ultimo operatore logico di base lavora con una sola proposizione alla volta, invece che con due. Di conseguenza, la sua tavola di verità sarà più piccola delle precedenti:

Definizione 1.7. (Negazione)

Data una proposizione p , la proposizione $\neg p$ ha valore di verità T esattamente quando p è falsa (e F se p è vera). La sua tavola di verità è la seguente

p	$\neg p$
T	F
F	T

Benchè semplice, la negazione mal si accorda con le espressioni del linguaggio corrente, e sorprendentemente è causa di un gran numero di interpretazioni errate!

Esercizio 5. Se p è la proposizione *Tutte le macchine italiane sono fatte male*, qual è la sua negazione?

- (1) Tutte le macchine italiane sono fatte bene
- (2) tutte le macchine italiane non sono fatte male
- (3) almeno una macchina italiana è fatta bene
- (4) almeno una macchina italiana non è fatta male

Può essere *tutte le macchine straniere sono fatte male*?

Torneremo più in là su questo tipo di situazioni, con una trattazione più completa, ma è interessante provare a rispondere già ora.

Benchè non compresi nel novero degli operatori di base, altri operatori sono di uso comune; di particolare importanza è l'operatore di *implicazione logica*, denotato con il simbolo $\Rightarrow$ (o dal simbolo $\rightarrow$), per emulare il meccanismo di base dei processi deduttivi umani. Esso rappresenta *grossomodo* il meccanismo *causa-effetto* della Fisica, ma è sostanzialmente differente da esso.

Assegnate le proposizioni p e q , l'implicazione logica da p a q si scrive $p \Rightarrow q$, e si legge *p implica q* o, alternativamente, *se p allora q* . L'idea di fondo è che *se p è vera, e l'implicazione è vera, allora anche q deve essere vera*. Data la sua speciale importanza, deve essere introdotto con rigore, perchè il "comune buon senso" può portarci rapidamente fuori strada:

Esempio 1.8.

- L'implicazione logica $(\sqrt{2} \text{ è irrazionale}) \Rightarrow (0 < 1)$ è vera o falsa?
- L'implicazione logica $(\text{Giulio Cesare è vivo}) \Rightarrow (1 + 1 = 2)$ è vera o falsa?
- L'implicazione logica $(\text{Giulio Cesare è morto}) \Rightarrow (1 + 1 = 3)$ è vera o falsa?
- L'implicazione logica $(\text{la Terra è piatta}) \Rightarrow (1 + 2 = 3)$ è vera o falsa?

Sulla sola base della descrizione approssimata appena data dell'operatore $\Rightarrow$, già queste domande possono causare un certo imbarazzo e risposte sbagliate.

Partiamo perciò da quello che siamo abituati a intendere con il termine *implicare*: normalmente, lo leghiamo al concetto fisico dell'associazione *causa-effetto* (causalità). Per esempio, lo facciamo nella frase *Se ti schiacci un dito ti fai male*.

In realtà, il concetto di "causalità" si basa su due componenti: una di *verità*, una di *consequenzialità*. Per dirlo in termini rozzi: se succede p , allora succede q . Ma nulla possiamo dire se p non succede, perchè la consequenzialità non è osservabile.

Il senso dell'implicazione logica, invece, *si basa su una singola componente, e precisamente quella di verità*. Perciò, più che identificare l'implicazione con il concetto di causa-effetto, la si deve immaginare come un *contratto*.

Esempio 1.9. Alberto vuole intraprendere la carriera politica, e annuncia un contratto con i suoi elettori: *Se mi eleggerete, abrogherò le tasse*. Cosa deve succedere, dopo le elezioni, per poter affermare senza tema di smentita che il contratto non è stato rispettato?

Palesamente, se Alberto è stato eletto e non ha mantenuto la promessa, allora possiamo dire che lui ha infranto il contratto, cioè non lo ha rispettato. Però, se Alberto non risulterà tra gli eletti, nessuno potrà dire che lui ha infranto il contratto: da questo punto di vista, il contratto è stato rispettato in pieno, è solo che non c'è stato modo di attuarlo, perchè la premessa (l'elezione di Alberto) non si è verificata.

Possiamo ora dare la definizione esatta dell'operatore di implicazione logica:

Definizione 1.10. (Implicazione logica)

Date le proposizioni p e q , la proposizione $p \Rightarrow q$ ha valore di verità F esattamente se p è vera e q è falsa (e negli altri casi è vera). La tavola di verità di $\Rightarrow$ è la seguente

p	q	$p \Rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Si noti che, coerentemente ma in maniera controintuitiva, se p ha valore logico F l'implicazione è vera *indipendentemente* dal valore logico di q . Quindi, per esempio, l'implicazione $(1 = 2) \Rightarrow$ *Oswaldo è colpevole di abigeato* è un'implicazione con valore logico T! Naturalmente, nessun tribunale condannerebbe Oswaldo in base a ciò: l'implicazione sarà pure vera, ma ciò non comporta che lo sia la proposizione *Oswaldo è colpevole di abigeato* – come già detto, ribadiamo che la proposizione composta ha valore di verità dipendente da quelli delle costituenti, ma è *altro*, una *nuova* proposizione.

Osservazione 1.11. A differenza di quanto accade per gli operatori $\vee$ e $\wedge$, nella tavola di verità di $\Rightarrow$ c'è asimmetria nel ruolo di p e q . Cioè, mentre non è importante chi nominiamo prima tra p e q se dobbiamo legarli con gli operatori logici $\vee$ o $\wedge$, scrivere $p \Rightarrow q$ è diverso dallo scrivere $q \Rightarrow p$. Per questo, attribuiamo un nome diverso a seconda del posto in cui compaiono: in $p \Rightarrow q$ la proposizione p si dice la *premessa* (o *ipotesi*) dell'implicazione, e q la sua *conclusione* (o *tesi*). Se invece scriviamo $q \Rightarrow p$, allora la premessa dell'implicazione è q , non più p .

Esempio 1.12. Sia a un fissato numero reale, e consideriamo le due proposizioni

- (1) $(a > 0) \Rightarrow (a^2 > 0)$;
- (2) $(a^2 > 0) \Rightarrow (a > 0)$.

Entrambe coinvolgono le stesse proposizioni semplici, $a > 0$ e $a^2 > 0$ (domanda: queste sono proposizioni? Sì, perchè qui sappiamo chi sia a : un fissato numero reale. Però è vero che potremmo precisarlo meglio, e lo faremo), ma (1) e (2) sono proposizioni molto diverse: mentre la (1) è vera quale che sia la scelta effettuata per a , la seconda non è sempre vera. Per esempio, se prendiamo $a = -2$, allora è vero che $a^2 > 0$, ma ciò non rende $a = -2 > 0$.

Ci sono tradizionalmente molti modi per esprimere un'implicazione usando il linguaggio corrente, e sicuramente sono stati incontrati molte volte nel corso degli anni di studio della Matematica nella scuola secondaria: l'implicazione $p \Rightarrow q$ può essere espressa a parole dicendo che

<i>Diretta</i>	<i>Inversa</i>
se p , allora q	q non appena p
p implica q	q consegue da p
p solo se q	q se p
p è sufficiente per q	q è necessaria per p
p è condizione sufficiente per q	q è condizione necessaria per p

E' bene imparare a riconoscere quale è l'implicazione, quando è espressa in uno di questi modi: abbiamo già detto che $p \Rightarrow q$ è una proposizione diversa da $q \Rightarrow p$, e uno degli errori più frequenti è leggere un'implicazione espressa in uno dei modi verbali della tabella e interpretarla attribuendo a p e q il ruolo sbagliato.

Esercizio 6. Le frasi *Sarai promosso solo se studierai* e *Se studierai sarai promosso* vogliono dire la stessa cosa o no? E le frasi *Se studierai sarai promosso* e *Sarai promosso se avrai studiato*?

La frase *Sarai promosso solo se studierai* vuol dire (vedi tabella di sopra) $p \Rightarrow q$, dove p è la proposizione *Sarai promosso* e q è la frase *studierai*. Vuol dire che non c'è possibilità che tu possa esser promosso se non hai studiato. Quindi, esser stato promosso implica che si è studiato, $p \Rightarrow q$. La seconda frase, invece, vuol dire $q \Rightarrow p$: se tu manterrai la tua parte del contratto (se studierai) è garantito che sarai promosso. Ma ciò è diverso dalla precedente frase: questo secondo contratto non esclude che tu possa esser promosso *pur senza aver studiato*.

Per la terza frase, dalla tabella si vede subito che vuol dire la stessa cosa della seconda: è un modo diverso di dire che se tu farai ciò che devi (studiare) allora sarai promosso, ma non esclude che tu possa esser promosso pur non avendo studiato.

La notazione matematica è più adatta al contesto rispetto al linguaggio naturale: **è più semplice capire cosa si intende con $p \Rightarrow q$ oppure con la frase q è condizione necessaria per p ?**

Esercizio 7. Alla luce della definizione di implicazione logica, rispondere ora alle domande dell'Esempio 1.8 e confrontare le risposte con quelle date a suo tempo.

Sappiamo che le proposizioni composte $p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow p$ sono in genere differenti, perciò il caso in cui esse vogliano dire *la stessa cosa* è degno di considerazione. Chiaro che l'espressione *due proposizioni vogliono dire la stessa cosa* non è abbastanza precisa, per cui diamo subito la

Definizione 1.13. (Bicondizionale o equivalenza logica)

Date le proposizioni p e q , la proposizione $p \iff q$ ha valore di verità T esattamente quando p e q assumono lo stesso valore di verità (e negli altri casi è F). La tavola di verità di $\iff$ è la seguente:

p	q	$p \iff q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

Come si vede dalla tavola, dire che $p \iff q$ è vera vuol dire che p e q saranno anche proposizioni differenti, ma assumono sempre lo stesso valore logico. Più che sull'operatore $\iff$, ciò fa spostare la nostra attenzione su p e q , e ci consente di dare la seguente

Definizione 1.14. Le proposizioni p e q si dicono *logicamente equivalenti* se la proposizione $p \iff q$ ha valore logico T.

Modi verbali differenti per dire la stessa cosa sono

p è equivalente a q

p se e solo se q

p è condizione necessaria e sufficiente per q

Facciamo un esempio:

Esempio 1.15. (Leggi di equivalenza per uguaglianze)

Dalla scuola primaria abbiamo imparato a memoria le cosiddette *leggi di equivalenza per le uguaglianze*; la prima legge recita così

Siano a, b, c numeri reali. Allora $a = b \iff a + c = b + c$.

Detta p la proposizione $a = b$ e q la proposizione $a + c = b + c$, l'enunciato esprime l'equivalenza logica tra esse. Si noti che l'enunciato NON dice che p e q sono la stessa proposizione: infatti se $c \neq 0$ le proposizioni p e q sono differenti. La legge ci dice però che $a = b$ è vera se e solo se $a + c = b + c$ è vera. Ad essa ricorriamo, per esempio, se vogliamo risolvere velocemente il problema *determinare i numeri reali x tali che $x + 5 = \sqrt{2}$* : siccome $x + 5 = \sqrt{2}$ è logicamente equivalente a $(x + 5) + (-5) = \sqrt{2} + (-5)$, siamo certi che il numero x cercato deve essere $x = \sqrt{2} - 5$. Nel linguaggio gergale della scuola, ciò è di solito espresso dicendo “portare il 5 a secondo membro cambiandolo di segno”. E' preferibile liberarsi il prima possibile di tali espressioni, che ingenerano confusione nascondendo la realtà delle cose.

La seconda legge di equivalenza per uguaglianze recita invece così:

Siano a, b, c numeri reali, e $c \neq 0$. Allora $a = b \iff ac = bc$.

Di nuovo, ciò vuol dire che le proposizioni $a = b$ e $ac = bc$ sono equivalenti, SE (a differenza di prima) il numero c è diverso da zero.

Esercizio 8. Assegnate le proposizioni p e q , esse sono logicamente equivalenti se e solo se le proposizioni $p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow p$ sono entrambe vere.

E' per questo motivo che si parla di *bicondizionale*: è la congiunzione delle proposizioni condizionali $p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow p$ (che può essere riscritta $p \iff q$).

L'esercizio fornisce un modo generale (anche se non l'unico!) di verificare velocemente se due proposizioni sono equivalenti o meno, controllando separatamente le due implicazioni $p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow p$. Più dettagliatamente, se p e q sono proposizioni assegnate, per provare che $p \iff q$ è vera (ha valore logico T)

- (1) prima si prova che è vera l'implicazione $p \Rightarrow q$;
- (2) poi si prova che è vera l'implicazione $q \Rightarrow p$;
- (3) a questo punto, siccome $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ è una proposizione vera, possiamo concludere che $p \iff q$ (equivalente ad essa) è vera, cioè che p e q sono proposizioni equivalenti

(questo metodo di dimostrare un'equivalenza logica è detto dimostrazione per *doppia implicazione*).

Vediamo un esempio di dimostrazione di un'equivalenza logica:

Esempio 1.16. Provare che, se a è un numero reale, allora

$a \geq 0 \iff \text{l'equazione } x^2 - a = 0 \text{ ammette soluzioni reali.}$

Procediamo per doppia implicazione: detta p la proposizione $a \geq 0$ e q la proposizione *l'equazione $x^2 - a = 0$ ammette soluzioni reali*, prima dimostriamo $p \Rightarrow q$, e poi $q \Rightarrow p$. Fatto ciò, possiamo affermare di aver dimostrato che $p \iff q$ è vera, cioè che le proposizioni (diverse!) p e q sono logicamente equivalenti.

$p \Rightarrow q$: se $a \geq 0$ sappiamo che esiste un (unico!) numero reale $b := \sqrt{a} \geq 0$ tale che $b^2 = a$. Sostituendo a x il numero b , si ha $b^2 - a = a - a = 0$, e quindi b è

una soluzione reale dell'equazione, per cui effettivamente l'equazione $x^2 - a = 0$ ammette soluzioni reali (ne abbiamo trovata almeno una!);

$\boxed{p \Leftarrow q}$: se l'equazione $x^2 - a = 0$ ammette soluzioni reali, vuol dire che esiste almeno un numero reale c che ne sia soluzione, cioè tale che $c^2 - a = 0$. Per il primo principio di equivalenza tra uguaglianze, ciò è equivalente a $c^2 = a$, e quindi $a \geq 0$, perchè il quadrato di un numero reale è non negativo. $\square$

Dopo aver introdotto singolarmente gli operatori lineari di base $\vee$, $\wedge$, $\neg$ e l'importante operatore $\Rightarrow$, passiamo ad esplorare le loro proprietà e le relazioni che intercorrono tra essi.

Lemma 1.17. *Nel seguito, siano a, b, c proposizioni arbitrarie, e sia ω una qualunque tra gli operatori $\vee$ e $\wedge$.*

- (1) ω è *commutativo*, cioè $a\omega b$ è equivalente a $b\omega a$;
- (2) ω è *idempotente*, cioè $a\omega a$ è equivalente ad a ;
- (3) ω è *associativo*, cioè $a\omega(b\omega c)$ è equivalente ad $(a\omega b)\omega c$.

Dimostrazione. Basta controllare le tavole di verità delle singole proposizioni. Un altro modo è procedere per doppia implicazione. La verifica è lasciata per esercizio. $\square$

La relazione che intercorre tra gli operatori $\wedge$ e $\vee$ è anch'essa molto semplice, e ricorda quella che intercorre tra le operazioni $\cdot$ e $+$ tra numeri reali:

Lemma 1.18. *Gli operatori $\wedge$ e $\vee$ sono *mutuamente distributivi*; cioè, date proposizioni a, b, c arbitrarie, risulta*

$$a \vee (b \wedge c) \iff (a \vee b) \wedge (a \vee c) \quad e \quad a \wedge (b \vee c) \iff (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

Dimostrazione. Anche questa verifica è lasciata come esercizio: basta testare le tavole di verità delle varie proposizioni. $\square$

Il motivo per il quale si parla di proprietà distributiva è perchè è formalmente la stessa, nota, proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto l'addizione, cioè $a(b + c) = ab + ac$.¹ Si noti, però, che mentre $+$ non è distributivo rispetto la moltiplicazione (cioè, è in genere *falso* che $a + (bc) = (a + b)(a + c)$), qui $\vee$ e $\wedge$ sono sullo stesso piano.

In effetti, sono moltissime le relazioni che intercorrono tra gli operatori logici, e non è nostro compito esaminarle tutte in queste note.

Una cosa che invece intendiamo approfondire in qualche misura sono le relazioni che intercorrono tra l'operatore di negazione $\neg$ e gli altri operatori logici. Infatti, è inutile sapere che una data proposizione è falsa, se non sappiamo dire esplicitamente cosa ciò comporta. Nel linguaggio corrente, in effetti, la negazione è spesso causa di scivoloni interpretativi (rileggere l'esercizio 5). Facciamo un altro piccolo esempio:

Esercizio 9. Se la frase *Non fumare non fa male* afferma il falso, la sua negazione afferma il vero. La domanda perciò è: qual è la negazione della precedente frase?

Vediamo allora quali sono le proprietà dell'operatore di negazione, che è così semplice e così delicato nell'interazione con gli altri operatori:

Lemma 1.19. (Proprietà di $\neg$)

- (1) l'operatore $\neg$ è *involutorio*: qualunque sia la proposizione p , le proposizioni p e $\neg(\neg p)$ sono equivalenti;
- (2) le relazioni tra gli operatori $\neg$, $\wedge$ e $\vee$ sono regolate dalle *leggi di De Morgan*: se p, q sono proposizioni qualunque,

¹letta *da destra verso sinistra*, nel linguaggio gergale viene espressa dicendo *mettere a in evidenza*!

- $\neg(p \vee q)$ è equivalente a $(\neg p) \wedge (\neg q)$;
 - $\neg(p \wedge q)$ è equivalente a $(\neg p) \vee (\neg q)$;
- (3) se p, q sono proposizioni qualunque, le proposizioni $\neg(p \Rightarrow q)$ e $p \wedge (\neg q)$ sono equivalenti.

Dimostrazione.

(1) Il fatto che $p \iff \neg(\neg p)$ segue subito dalla definizione di *equivalenza logica*: p e $\neg(\neg p)$ hanno sempre lo stesso valore di verità, indipendentemente dal valore logico di p . Questo è reso più evidente dalla costruzione della tavola di verità della proposizione di $\neg(\neg p)$:

p	$\neg p$	$\neg(\neg p)$
T	F	T
F	T	F

(2) Proviamo che $\neg(p \wedge q) \iff (\neg p) \vee (\neg q)$ usando le tavole di verità, come nel punto precedente. Si ha

$\neg(p \wedge q)$	$p \wedge q$	p	q	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p) \vee (\neg q)$
F	T	T	T	F	F	F
T	F	T	F	F	T	T
T	F	F	T	T	F	T
T	F	F	F	T	T	T

Allo stesso modo si prova che $\neg(p \vee q) \iff (\neg p) \wedge (\neg q)$.

(3) Anche il fatto che $\neg(p \Rightarrow q)$ è equivalente a $p \wedge (\neg q)$ può essere dimostrato tramite la scrittura delle tavole di verità. Tuttavia, a scopo didattico, diamo una dimostrazione che utilizza la definizione di *equivalenza logica* ma senza scrivere le tavole. Per comodità, chiamiamo a la proposizione composta $\neg(p \Rightarrow q)$, e chiamiamo b la proposizione (pure composta) $p \wedge (\neg q)$.

- Proviamo che $a \Rightarrow b$: sappiamo che se a ha valore logico F, allora $a \Rightarrow b$ ha valore logico T, indipendentemente dal valore logico di b . Resta da vedere cosa succede se a ha valore logico T. In tal caso, dire che a , cioè $\neg(p \Rightarrow q)$, è vera vuol dire che $\neg a$, cioè $p \Rightarrow q$, è falsa (ricordare che, per il punto (1), $\neg(\neg(p \Rightarrow q))$ è equivalente a $p \Rightarrow q$), e ciò accade precisamente quando p ha valore logico T e q ha valore logico F. In tal caso, possiamo calcolare il valore logico di b , cioè di $p \wedge (\neg q)$, che è T. Perciò $a \Rightarrow b$ ha valore logico T; cioè, a implica b .
- Proviamo che $b \Rightarrow a$: di nuovo, se b ha valore logico F l'implicazione ha valore logico T, e basta concentrarci sul caso in cui b abbia valore logico T. Ciò vuol dire che tanto p che $\neg q$ hanno valore logico T, e quindi p è vera e q è falsa. Da ciò calcoliamo il valore logico di a , cioè quello di $\neg(p \Rightarrow q)$: poichè p è vera e q è falsa, il valore logico di $p \Rightarrow q$ è F, e quindi $\neg(p \Rightarrow q)$ ha valore logico T. Pertanto, anche l'implicazione $b \Rightarrow a$ è vera.

Siccome sia $a \Rightarrow b$ che $b \Rightarrow a$ sono vere, le proposizioni a e b sono logicamente equivalenti. $\square$

Osservazione 1.20. A parte l'ovvia proprietà involutoria di $\neg$, spesso sinteticamente (e grossolanamente) riassunta dalla frase *una doppia negazione afferma*, sicuramente le Leggi di De Morgan sono le relazioni che più di frequente intervengono nel formare la negazione di una proposizione composta. Il loro funzionamento è semplice: per negare la congiunzione o la disgiunzione di p e q si prendono le negazioni di p e q , e si scambia congiunzione con disgiunzione.

La terza relazione l'abbiamo dimostrata in dettaglio, ma esprime anch'essa una cosa molto semplice: negare l'implicazione $p \Rightarrow q$ (cosa che di solito si denota con

$p \not\Rightarrow q$ piuttosto che con $\neg(p \Rightarrow q)$, e si legge **p non implica q** , vuol dire asserire che p è vera e q no (cioè che $p \wedge (\neg q)$ è vera). Questo sarà rilevante in seguito.

Esercizio 10. Abbiamo detto che il sistema degli operatori $\vee$, $\wedge$ e $\neg$ è un sistema funzionalmente completo, cioè ogni proposizione può essere ottenuta componendo delle proposizioni più semplici tramite gli operatori suddetti.

Ora: $p \Rightarrow q$ è una proposizione composta, perciò deve esser possibile esprimerla tramite le sole operazioni $\vee$, $\wedge$ e $\neg$ (nel senso: deve esser possibile scrivere una proposizione equivalente ad essa che usa solo gli operatori logici di base).

Provateci!

Esempio 1.21. Se x è un numero reale, affermare che

$$-1 \leq x \leq 7$$

vuol dire affermare che $(x \geq -1) \wedge (x \leq 7)$.

Qual è la sua negazione?

Ora conosciamo le leggi di De Morgan, e non ci dovrebbero esser problemi a costruire la negazione in termini di equivalenza logica:

$$\begin{aligned} \neg(-1 \leq x \leq 7) &\iff \neg((x \geq -1) \wedge (x \leq 7)) \\ &\iff (\neg(x \geq -1)) \vee (\neg(x \leq 7)) \quad (\text{per le leggi di De Morgan}) \\ &\iff (x < -1) \vee (x > 7). \end{aligned}$$

1.1. Tecniche dimostrative di base. Buona parte del lavoro in Matematica consiste nell'affermare che, date certe ipotesi, si hanno necessariamente certe altre conseguenze. In pratica, ciò vuol dire affermare che certe implicazioni $p \Rightarrow q$ sono vere. Ovviamente, il solo affermarlo non basta a garantire che siano vere, e vanno dimostrate: bisogna cioè provare che l'implicazione $p \Rightarrow q$ ha valore logico T. Per farlo, basta limitarsi a dimostrare che se p ha valore logico T allora anche q deve avere valore logico T: infatti contemplare il caso in cui p è falsa non è significativo (perchè, quale che sia il valore logico di q , la proposizione $p \Rightarrow q$ ha in tal caso valore logico T).

Il primo tentativo da fare è procedere direttamente a far vedere che *se p è vera allora necessariamente q è vera*. Questa tecnica dimostrativa viene chiamata, perciò, *dimostrazione diretta*. Diamo un esempio:

Esercizio 11. Siano a, b, u, v numeri interi. Se a e b sono entrambi multipli di 3, allora anche $au + bv$ è un multiplo di 3.

Chiamiamo p la proposizione **a e b sono multipli di 3** e q la proposizione **$au + bv$ è un multiplo di 3**. L'esercizio afferma che $p \Rightarrow q$, per cui dobbiamo dimostrare che quest'implicazione ha valore logico T. Come detto, basta supporre che sì, sia a che b sono multipli di 3, e far vedere che necessariamente anche il numero $au + bv$ è un multiplo di 3. Possiamo procedere con una (semplice) dimostrazione diretta:

- dire che a è un multiplo di 3 vuol dire che esiste un opportuno numero intero h per il quale risulti $a = 3h$;
- dire che b è un multiplo di 3 vuol dire che esiste un opportuno numero intero k (non è detto che coincida con il numero h determinato in precedenza!) per il quale si possa scrivere $b = 3k$.

Guardiamo ora al numero $au + bv$: anche se non conosciamo u e v , si ha

$$au + bv = (3h)u + (3k)v = 3(hu) + 3(kv) = 3(hu + kv).$$

Poichè il numero $hu + kv$ è il risultato della somma tra il prodotto uh e il prodotto kv tra numeri interi, anche $hu + kv$ è un numero intero, ed è tale che $au + bv = 3(hu + kv)$; cioè, $au + bv$ è un multiplo di 3.

Abbiamo così fatto vedere che se p è vera, necessariamente q è vera, e quindi ciò basta per dire che l'implicazione $p \Rightarrow q$ è vera. $\square$

Dimostrare un'implicazione tramite una dimostrazione diretta è, in linea di principio, la migliore scelta possibile: non solo è un argomento espositivo molto semplice (non a caso, si chiama *diretta*!), ma spesso dà anche le indicazioni necessarie a costruire esplicitamente una procedura (un algoritmo) utile per risolvere problemi che coinvolgono l'implicazione dimostrata (nell'esercizio di prima, ci dice come fare a scrivere $au + bv$ come multiplo di 3).

Tuttavia, non sempre affrontare qualcosa direttamente è la strategia migliore: può essere che la strada diretta sia troppo complicata, o che non ci sia affatto! Vedremo perciò brevemente due strategie alternative, entrambe abbastanza comuni, per effettuare una dimostrazione in modo indiretto. Cominciamo con la *dimostrazione per contrapposizione*:

Definizione 1.22. Siano p e q proposizioni, e consideriamo la proposizione composta $p \Rightarrow q$;

- la proposizione $q \Rightarrow p$ si dice il *converso* della proposizione $p \Rightarrow q$;
- la proposizione $(\neg q) \Rightarrow (\neg p)$ si dice la *forma contrappositiva* di $p \Rightarrow q$.

Già abbiamo notato che la proposizione $p \Rightarrow q$ e il suo converso sono in genere logicamente differenti; per ciò che riguarda la forma contrappositiva, invece, si ha

Esercizio 12. Date le proposizioni p e q , le proposizioni $p \Rightarrow q$ e $(\neg q) \Rightarrow (\neg p)$ sono equivalenti.

Basta costruire la tavola di verità della forma contrappositiva di $p \Rightarrow q$ e confrontarla con la tavola di verità di $p \Rightarrow q$. $\square$

Talvolta, per dimostrare che una implicazione $p \Rightarrow q$ è vera, può essere più conveniente dimostrare, al suo posto, che è vera $(\neg q) \Rightarrow (\neg p)$ (la sua forma contrappositiva) perchè magari è più semplice. Questa tecnica viene chiamata *dimostrazione per contrapposizione*.

Warning: si badi bene però a non confondere la forma contrappositiva di $p \Rightarrow q$ con il *converso* della stessa! $q \Rightarrow p$ NON è, in genere, equivalente a $p \Rightarrow q$!

Vediamo un esempio pratico di dimostrazione per contrapposizione:

Esercizio 13. Sia n un intero positivo. Provare che se $2^n - 1$ è un numero primo allora n è un numero primo.

Chiamiamo

- p la proposizione $2^n - 1$ è un numero primo;
- q la proposizione n è un numero primo.

Dobbiamo dimostrare che l'implicazione $p \Rightarrow q$ è vera. Tuttavia, se supponiamo p vera (cioè: se supponiamo che $2^n - 1$ sia un numero primo) sfruttare quest'informazione per far vedere che q è necessariamente vera (cioè: che n stesso è un numero primo) appare alquanto problematico.

Cambiamo strategia: facciamo vedere che $(\neg q) \Rightarrow (\neg p)$, cioè che se n NON è un numero primo ($\neg q$ è vera) allora necessariamente $2^n - 1$ NON è un numero primo (cioè: $\neg p$ è vera). Stiamo provando a usare la tecnica di dimostrazione per contrapposizione.

Ora: dire che n non è primo vuol dire che dobbiamo poterlo scrivere come $n = ab$, per opportuni numeri interi $a, b \geq 2$. Allora $2^n = 2^{ab} = (2^a)^b$ (per le proprietà delle potenze). Dal prodotto notevole $x^b - 1 = (x - 1)(x^{b-1} + x^{b-2} + \dots + x + 1)$, sostituendo alla lettera x il valore 2^a si ottiene

$$2^n - 1 = (2^a)^b - 1 = (2^a - 1)(2^{a(b-1)} + 2^{a(b-2)} + \dots + 2^a + 1).$$

Dato che sia a che b sono ≥ 2 risulta che $2^a - 1$ e $2^{a(b-1)} + \dots + 1$ sono entrambi ≥ 2 , per cui $2^n - 1$ è un numero composto (cioè: non è un numero primo), e la proposizione $(\neg q) \Rightarrow (\neg p)$ ha valore logico T. Poichè essa è la forma contrappositiva della proposizione $2^n - 1$ è primo $\Rightarrow n$ è primo, anche quest'ultima è vera. $\square$

Osservazione 1.23. A sottolineare ancora una volta la differenza tra *converso* di un'implicazione e *forma contrappositiva* della stessa, notiamo che il converso dell'implicazione appena dimostrata è invece FALSO. Cioè: $q \nRightarrow p$. Infatti, il converso $q \Rightarrow p$ vuol dire *se n è un numero primo $\Rightarrow 2^n - 1$ è un numero primo*, e questo è falso: se $n = 11$ si ha $2^{11} - 1 = 23 \cdot 89$, per cui n è primo (q ha valore logico T) ma $2^n - 1$ no (p ha valore logico F), cioè $q \Rightarrow p$ è falsa. $\square$

Dagli esempi dati sinora, sembra che il valore logico di una proposizione composta (p.es.: quello di $p \Rightarrow q$) cambi automaticamente al cambiare del valore logico delle componenti. Non è sempre così: può capitare che proposizioni composte risultino sempre vere, o sempre false, indipendentemente dal valore logico delle loro componenti più semplici.

Esercizio 14. Determinare il valore logico della proposizione

$$\left((p \wedge q) \vee (p \wedge (\neg q)) \right) \wedge (\neg p)$$

in dipendenza dei valori logici di p e q .

In sostanza, l'esercizio ci chiede solo di scrivere la tavola di verità della proposizione considerata. Si ha

p	q	$p \wedge q$	$p \wedge (\neg q)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge (\neg q))$	$\left((p \wedge q) \vee (p \wedge (\neg q)) \right) \wedge (\neg p)$
T	T	T	F	T	F
T	F	F	T	T	F
F	T	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F

Definizione 1.24. Una proposizione composta il cui valore logico è sempre T è detta una **tautologia**; una proposizione composta il cui valore logico è sempre F è detta una **contraddizione**.

Ad esempio, la proposizione $p \vee (\neg p)$ è una tautologia e, di conseguenza, la sua negazione $p \wedge (\neg p)$ è una contraddizione.

Chiarito cosa si debba intendere con *contraddizione*, esaminiamo una terza strategia dimostrativa che viene adoperata molto frequentemente, basata sul fatto che siccome i possibili valori logici di una proposizione sono due, se uno dei due non può essere assunto allora il valore logico della proposizione deve forzatamente essere l'altro. La tecnica che esaminiamo si chiama *dimostrazione per assurdo*:

- dobbiamo dimostrare che $p \Rightarrow q$ è vera, ma invece di procedere direttamente o per contrapposizione
- **supponiamo che l'implicazione sia FALSA** (cioè che $p \nRightarrow q$ sia vera), e
- cerchiamo di evidenziare il manifestarsi di una contraddizione.

Se ci riusciamo, ne consegue che l'implicazione $p \Rightarrow q$ **non può essere falsa**, e quindi è vera. Operativamente,

- (1) assumere che $p \nRightarrow q$ è equivalente a dire che $p \wedge \neg q$ è vera: cioè che è vera sia p che $\neg q$ (*negazione della tesi*);
- (2) al termine di una catena di deduzioni, si arriva a concludere che p è falsa;
- (3) poichè p dev'essere contemporaneamente vera (per *ipotesi*) e falsa (per *deduzione*), si che $p \wedge (\neg p)$ ha valore logico T, mentre non può ($p \wedge (\neg p)$ è una contraddizione!).

Il procedimento così schematizzato non è da prendersi alla lettera: a volte capita che nel corso della dimostrazione per assurdo risulti falsa non la proposizione p originale, ma qualche altra proposizione r che sappiamo essere certamente vera (per esempio, potremmo arrivare all'affermazione che risulta $0 \cdot a \neq 0$, mentre sappiamo che indipendentemente da a il prodotto $0 \cdot a$ è nullo). Lo schema resta valido, però includendo tra le ipotesi la proposizione r : siccome r è sempre vera, la proposizione $p \wedge r$ (la nuova ipotesi) e la proposizione p (l'ipotesi originale) sono equivalenti, come si può controllare per fugare ogni dubbio.

Warning! Le dimostrazioni per assurdo sono uno strumento potente, ma da usare con cautela: non sono *costruttive*, ed è frequente usarle nel modo sbagliato (p.es.: negando l'ipotesi invece della tesi, o confondendola con la forma contrappositiva).

Esempio 1.25. Siano a, b numeri interi *positivi*. Provare che se $MCD(a, b) \neq 1$ allora per ogni coppia di interi x, y risulta $ax + by \neq 1$.

Qui, con $MCD(a, b)$ si intende il *massimo comun divisore* degli interi dati, cioè il più grande tra i divisori comuni dei numeri a, b assegnati.² Dato che 1 è certamente un divisore comune ad a e b , è ovvio che quali che siano a e b risulta $MCD(a, b) \geq 1$, e quindi nelle nostre ipotesi è > 1 . Però, dalle sole nozioni fornite tradizionalmente nella scuola secondaria³ non abbiamo alcun indizio su come procedere.

Proviamo a ragionare per assurdo: supponiamo perciò che $d := MCD(a, b) > 1$ ma anche che esista una coppia di interi x, y tali che $ax + by = 1$ (neghiamo cioè *la tesi*). Poichè per definizione d è un divisore tanto di a quanto di b , ne segue che esistono degli interi h, k tali che $a = dh$ e $b = dk$. Da ciò segue che

$$1 = ax + by = (dh)x + (dk)y = d(hx + ky).$$

Dato però che i soli divisori interi di 1 sono sè stesso e -1 , e che $hx + ky$ è un intero, segue necessariamente che $d = 1$, contraddicendo l'ipotesi di partenza. Abbiamo raggiunto un assurdo, che è derivato dall'aver supposto che la tesi della proposizione fosse falsa; cioè, la proposizione **non può** essere falsa, e di conseguenza **è vera**. $\square$

1.2. Variabili, indeterminate, incognite, parametri. Frequentemente, in un'espressione matematica compaiono simboli (p.es.: $\sin(\pi/4)$, $\log 15$, $x^2 + y^2 = 1, \dots$) che coinvolgono lettere dell'alfabeto, romano o greco. *P.es.:* $x, y, z, \alpha, \beta, \gamma, \dots$

A volte esse formano l'abbreviazione di una parola che designa un concetto (es.: $\sinh$ sta per *seno iperbolico*, $\arctan$ sta per *arcotangente*), e si aggiungono a una quantità di altri simboli, più astratti (es.: $\sqrt{}, \oint, \partial$).

Altre volte, ed è di questo che stiamo per discutere, esse vengono usate come simboli in sè stesse (p.es.: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$), e svolgono il ruolo di *elemento generico*: prima o poi, al posto di tali lettere potremo sostituire degli enti matematici (numeri, funzioni, insiemi, etc) e quel che abbiamo ottenuto per elementi generici di un certo tipo continuerà a valere in particolare quando essi verranno rimpiazzati da elementi particolari di quel tipo.

A seconda del contesto e degli scopi per cui vengono introdotte, le lettere presenti in una scrittura matematica prendono un nome particolare.

- **Variabili:** Se abbiamo più valori da considerare e da inserire in una stessa formula, invece di scrivere per ciascuno di essi l'espressione e il risultato che genera, usiamo una o più lettere e scriviamo sinteticamente la formula in cui le lettere svolgono il ruolo di elementi generici. In tal caso, le lettere introdotte sono chiamate *variabili*.

²una definizione più corretta e generale di questa nozione, tantomeno limitata ai numeri interi *positivi*, verrà incontrata nel corso di Matematica Discreta

³cioè, che il $MCD(a, b)$ si calcola prendendo il prodotto dei soli fattori primi comuni ad a e b , con il minimo esponente

Per esempio, quando abbiamo detto *Date le proposizioni p, q , diciamo $p \vee q \dots$* stiamo usando le lettere p, q come variabili, nelle quali possiamo sostituire tutte le proposizioni che ci possono venire in mente.

Oppure, quando disegniamo il grafico della parabola $y = 2x^2$, le lettere x e y sono variabili: per la precisione, x è la variabile *indipendente*, che facciamo variare tra tutti i numeri reali, e per ciascuno di tali valori si ottiene un valore della variabile *dipendente* y .

Warning: Se usiamo la lettera x come variabile, *dobbiamo specificare dove facciamo variare x* , o la scrittura perde senso.

- **Indeterminate:** A volte usiamo le lettere come elementi puramente generici, anche se non abbiamo valori particolari che ci interessa sostituire.

Per esempio, se scriviamo il *polinomio* $x^2 + 3x - 4$, la lettera x è usata come *indeterminata*: possiamo anche sostituire a x un numero, ma non è nei nostri obiettivi immediati. Questo è quel che facciamo quando consideriamo i prodotti notevoli, e scriviamo le uguaglianze

- $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$;
- $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$;
- $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$
- $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

eccetera.

Per esempio, ancora, possiamo scrivere che $x^2 + 3x - 4 = (x + 4)(x - 1)$, pur non avendo alcun valore che intendiamo sostituire al posto della x . In tutti questi casi, trattiamo la lettera x e la lettera y come *indeterminate*. D'altra parte, poichè la scrittura $x^2 + 3x - 4 = (x + 4)(x - 1)$ vale per un elemento generico (l'indeterminata x), essa resta valida anche quando a x sostituiamo un numero (e trattiamo x una variabile).

Per esempio, per calcolare $10^2 + 30 - 4$ basta calcolare $(10 + 4)(10 - 1) = 14 \cdot 9 = 126$.

Osservazione 1.26. Una lettera usata come indeterminata non ha bisogno della specificazione di dove deve variare.

Ci serve piuttosto sapere quale *tipo* di oggetto rappresenta, cioè di cosa è un elemento generico.

Per esempio, se x, y rappresentano numeri reali, la regola $xy = yx$ è valida; se invece rappresentano **matrici** no.

- **Incognite** Un'equazione o un sistema è un modo sintetico per dire **Problema: dato questo, per quali valori tra quelli disponibili questo è valido?** I valori da determinare sono rappresentati da una o più lettere che, per questo motivo, sono dette *incognite*.

P.es: nella scuola secondaria *Risolvere l'equazione $x^2 - 3x = 2$* riassumeva sinteticamente la frase **Problema: determinare i numeri reali il cui quadrato diminuito del triplo del numero stesso è pari a 2**. Qui, la lettera x *svolge il ruolo* di incognita del problema.

Warning: Un'equazione non è ben posta se non si specifica dove vanno cercate le soluzioni! Nella scuola secondaria, il tacito assunto è che le si cerca tra i numeri reali. Non dev'essere per forza così: l'equazione $2x = 3$ può essere posta sui soli numeri interi, e in tal caso NON ha soluzioni: 3 è dispari, e i valori per x sono da cercare solo tra i numeri interi (per cui $2x$ è necessariamente pari).

- **Parametri:** Talvolta invece di un singolo ente matematico si considerano tanti oggetti, dello stesso tipo, distinti tra di loro da un "*tag*" che, con poca fantasia ma molta efficacia, si rappresenta con una lettera. Tale lettera prende allora il nome di *parametro*.

Per esempio, **al variare di c tra i numeri reali**, la scrittura $y = 2x + c$ rappresenta non una, ma infinite rette del piano cartesiano, tutte parallele tra loro. Qui, x e y sono considerate variabili, e c è un *parametro*: a ciascun valore del parametro corrisponde esattamente una di quelle rette.

Oppure, **al variare di c tra i numeri interi pari**, l'*equazione posta sui numeri reali* $xy - c = 0$ rappresenta non una, ma infinite equazioni di secondo grado nelle due incognite x ed y sull'insieme dei numeri reali: una per ogni valore del parametro c (che varia tra i soli numeri interi pari, per nostra assegnazione).

Anche un parametro, per aver senso, deve avere ben specificato il suo range (campo di variabilità).

1.3. Predicati.

La scrittura $(x > 1) \wedge (x < 2)$ è una proposizione? Ovviamente, non lo è. Il problema è che non sappiamo chi rappresenti x , per cui allo stato attuale non solo non possiamo attribuire un valore di verità a quella scrittura ma, peggio, non dice nemmeno qualcosa di compiuto: è una “frase appesa”, in attesa di essere completata a una proposizione, non appena venga specificato qualcosa di più preciso sulla *variabile* x che in essa compare. Quella scrittura è un esempio di ciò che chiamiamo *predicato (della variabile x)*. Più precisamente,

Definizione 1.27. Un'affermazione p che coinvolge una variabile è detta un *predicato*. Il range in cui può variare la variabile è detto l'*ambito del discorso*.

Nell'esempio qui sopra, se specifichiamo che $x = 2$, la scrittura diventa $(2 > 1) \wedge (2 < 2)$, che è una proposizione e ha valore di verità F; se $x = 1.5$, si ottiene un'altra proposizione, $(1.5 > 1) \wedge (1.5 < 2)$, che ha valore di verità T. D'altra parte, potremmo essere interessati a completarla non sostituendo a x un singolo valore, ma tutto un range di valori (per esempio, per x che varia in tutto l'insieme dei numeri reali). Stiamo cioè specificando l'ambito del discorso. Ci basta questo? No, non ancora.

Specificare l'ambito del discorso è essenziale, ma è anche essenziale specificare in che modo la variabile varia nell'ambito. Tipicamente, ciò consiste nel dare una *quantificazione* della variabilità.

Esempio 1.28. Specificare che x deve variare tra i numeri reali non basta a rendere $(x > 1) \wedge (x < 2)$ una proposizione, perchè ancora non è possibile decidere se è vera o falsa:

- **per tutti gli x risulta $(x > 1) \wedge (x < 2)$** è effettivamente una proposizione, ed è FALSA. Infatti non è vero che prendendo un qualunque numero reale da sostituire ad x si ottiene una proposizione vera: per $x = 1$ si ottiene una proposizione falsa;
- **esiste un x per il quale risulta $(x > 1) \wedge (x < 2)$** è effettivamente una proposizione, ed è VERA: basta esibire $x = 1.5$ per avere un numero reale in corrispondenza del quale la proposizione è vera;
- di conseguenza, dire solo che *l'ambito del discorso per x è l'insieme dei numeri reali* non rende la scrittura una proposizione.

Il modo in cui si specifica come la x che compare nel predicato $p(x)$ può variare nell'ambito del discorso si chiama *quantificazione*, e in realtà nella quasi totalità dei casi pratici la quantificazione avviene utilizzando uno dei seguenti simboli, perciò detti *quantificatori*:

- $\exists$ – **Quantificatore esistenziale**: per dire che **esiste almeno un valore a** nell'ambito del discorso per il quale la proposizione $p(a)$ è vera si scrive $\exists x$ **tale che $p(x)$** (o anche, direttamente, $\exists x p(x)$: il *tale che* resta sottinteso).

- $\forall$ – **Quantificatore universale**: per dire che **per ogni valore** a di x nell'ambito del discorso la proposizione $p(a)$ è vera si scrive $\forall x p(x)$.

C'è, per la verità, anche una forma rafforzata del quantificatore universale, il quantificatore $\exists!$: dire che $\exists! x p(x)$ vuol dire che **esiste esattamente un** valore di x nell'ambito del discorso per il quale vale il predicato $p(x)$, e combina il senso della quantificazione $\exists$ (esistenza di almeno un valore per x) con un'affermazione di unicità (non può essercene più di uno).

Esempio 1.29. La proposizione **l'equazione $x^2 + 3x + 2 = 0$ ammette una radice reale** è una proposizione (vera), che possiamo riformulare in un modo più chiaro ed esplicito:

$$\exists x \text{ numero reale tale che } x^2 + 3x + 2 = 0.$$

Infatti, scegliendo $x = -1$ si prova la veridicità della proposizione.

La forma rafforzata della proposizione precedente

$$\exists! x \text{ numero reale tale che } x^2 + 3x + 2 = 0$$

è invece falsa: a parte il valore $x = -1$ esibito prima, anche $x = -2$ soddisfa $x^2 + 3x + 2 = 0$. Perciò viene meno l'unicità, affermata in $\exists!$.

Cambiare la quantificazione cambia il senso della frase: in effetti anche

$$\forall x \text{ numero reale } x^2 + 3x + 2 = 0$$

è una proposizione falsa! Nel linguaggio corrente, la si leggerebbe *qualunque sia il numero reale x risulta $x^2 + 3x + 2 = 0$* , il che è falso. Per esempio: 0 è un numero reale, ma per $x = 0$ si ha $0^2 + 3 \cdot 0 + 2 = 2 \neq 0$.

Esempio 1.30. La proposizione **$\sqrt{2}$ è un numero razionale** è una proposizione (FALSA), che per quanto chiara e sintetica può essere resa più chiara ed evidente. **Cosa vuol dire, più estesamente, quella proposizione?**

$$\exists a \text{ numero intero, } \exists b \text{ numero intero non nullo, tali che } a/b = \sqrt{2}$$

o, più sinteticamente,

$$\exists a, b \text{ numeri interi, con } b \neq 0, \text{ tali che } a/b = \sqrt{2}.$$

Warning: Il fatto che la parte esistenziale sia *nascosta* nell'affermazione **$\sqrt{2}$ è un numero razionale** è una cosa da notare: questo tipo di situazione è molto frequente.

Per evitare di specificare sempre a parole gli ambiti, si usano dei simboli a indicare i più comuni insiemi numerici. Senza entrare nemmeno di striscio nella questione di come questi insiemi vadano correttamente introdotti, per i nostri scopi ci appoggiamo a quelle che sono le comuni nozioni di scuola secondaria, e introduciamo dei simboli solo con lo scopo di accorciare le locuzioni (in accordo con le notazioni usualmente adottate su tutti i libri):

- $\mathbb{N}$ – l'insieme dei numeri *naturali*, cioè i numeri $0, 1, 2, \dots$;
- $\mathbb{Z}$ – l'insieme dei numeri *interi*, cioè i numeri $\dots, -2, -1, 0, +1, +2, \dots$;
- $\mathbb{Q}$ – l'insieme dei numeri *razionali*, cioè le frazioni a/b dove a, b sono numeri interi e $b \neq 0$;
- $\mathbb{R}$ – l'insieme dei numeri *reali*, cioè l'insieme che comprende i numeri razionali, gli irrazionali algebrici come $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$, $\dots$ e i numeri trascendenti come π , $e, \dots$.

$\mathbb{R}$ costituisce l'insieme numerico su cui sono basati i programmi di Matematica della scuola secondaria superiore;

e si usa il simbolo $\in$ (e rispettivamente il simbolo $\notin$) per indicare l'appartenenza (e rispettivamente la non appartenenza) di un oggetto a uno di tali insiemi. P.es.: per dire **x è un numero razionale** si scrive $x \in \mathbb{Q}$; per dire che **x è un numero reale irrazionale** si scrive $(x \in \mathbb{R}) \wedge (x \notin \mathbb{Q})$.

L'ultimo esempio, perciò, si scrive sinteticamente, in simboli, come

$$\sqrt{2} \in \mathbb{Q} \iff \exists a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0, \text{ tali che } a/b = \sqrt{2}.$$

L'aver introdotto predicati e quantificatori rende pienamente effettiva la notazione sviluppata: adesso sì che ogni frase Matematica può essere compiutamente espressa con chiarezza e precisione. Ciò non altera il senso degli operatori logici $\vee$ e $\wedge$, nè il senso dell'implicazione, perchè si tratta solo di ampliare il modo di scrivere una proposizione; l'unico operatore per il quale è bene dare qualche indicazione aggiuntiva è il solito: la negazione, quella cioè che sappiamo essere più "fragile" nella gestione. Essenzialmente, per negare una proposizione in cui compaiono predicati e quantificatori, bisogna solo osservare che

La negazione scambia i quantificatori, e poi agisce come al solito:

- $\neg(\forall x p(x))$ è equivalente a $\exists x \neg p(x)$;
- $\neg(\exists x p(x))$ è equivalente a $\forall x \neg p(x)$.

Esempio 1.31. Qual è la negazione di **Tutti i numeri pari sono positivi**?

- Fissiamo l'ambito del discorso: **l'insieme dei numeri interi**, cioè $\mathbb{Z}$
- costruiamo i predicati $p(x)$: **x è pari**, $q(x)$: **x è positivo**
- la proposizione data è esprimibile come $\forall x \in \mathbb{Z} (p(x) \Rightarrow q(x))$
- la negazione è $\exists x \in \mathbb{Z}$ tale che $\neg(p(x) \Rightarrow q(x))$, cioè $\exists x \in \mathbb{Z}$ tale che $p(x) \wedge (\neg q(x))$, cioè **c 'è almeno un numero pari ≤ 0**

Esercizio 15. Sia A l'insieme di tutti gli animali (ambito del discorso), e fissiamo i predicati $p(x)$: **x è un leopardo** e $q(x)$: **x ha le macchie**.

(1) Cosa vogliono dire le proposizioni

$$\forall x \in A (p(x) \Rightarrow q(x)) \text{ e } \forall x \in A (p(x) \wedge q(x))?$$

(2) Quali sono le loro negazioni?

La scrittura blu vuol dire *qualunque sia l'animale x , se è un leopardo allora ha le macchie*, che possiamo sintetizzare in **tutti i leopardi hanno le macchie**. La sua negazione si ottiene subito, ed è

$$\exists x \in A \neg(p(x) \Rightarrow q(x)) \text{ cioè } \exists x \in A p(x) \wedge \neg(q(x)),$$

che a parole può essere resa con **esiste almeno un leopardo senza macchie**.

La scrittura rossa invece vuol dire *qualunque sia l'animale x , è un leopardo ed ha le macchie*, cioè **tutti gli animali sono leopardi con le macchie**. La negazione è

$$\exists x \in A \neg(p(x) \wedge q(x)) \text{ cioè } \exists x \in A \neg(p(x)) \vee \neg(q(x)),$$

che a parole può essere espresso con **c 'è almeno un animale che non è un leopardo oppure non ha le macchie**.

Torniamo a un esercizio che avevamo lasciato in sospeso (o meglio, non avevamo esaminato a fondo), precisamente l'esercizio 5:

Esercizio 16. Se p è la proposizione **Tutte le macchine italiane sono fatte male**, qual è la sua negazione?

L'ambito del discorso sia l'insieme di tutte le macchine, M ; consideriamo i predicati $a(x)$: **x è italiana** e $b(x)$: **x è fatta male**. Allora la proposizione p si esprime come

$$\forall x \in M (a(x) \Rightarrow b(x)).$$

Ora sappiamo costruire la sua negazione: è $\exists x \in M a(x) \wedge \neg(b(x))$, che tradotta in linguaggio corrente si legge **C 'è almeno una macchina italiana che non è fatta male**, o anche **Non tutte le macchine italiane sono fatte male**. Nell'elenco proposto nell'esercizio 5, perciò, la risposta corretta era la (4). Occhio: ciò non vuol dire che c 'è una macchina italiana che sia fatta bene... $\square$

Abbiamo per semplicità considerato predicati in una sola variabile, ma non c'è motivo di sottostare a questa restrizione: possiamo avere predicati in un numero qualunque di variabili! Le cose importanti per poter passare da *predicati* a vere *proposizioni* sono le seguenti:

- Per ogni variabile deve essere specificato un ambito e una quantificazione. Altrimenti, il predicato resta un predicato, non diventa una proposizione.
- Il senso della proposizione dipende dall'ordine con cui sono introdotte le variabili

Per il resto, si procede come per predicati di una singola variabile.

Esempio 1.32. Partiamo dal predicato (di due variabili) $p(x, y): x + y = 0$. La sola quantificazione $\forall x \in \mathbb{Z}$ non rende la frase $\forall x \in \mathbb{Z} (x + y = 0)$ una proposizione: resta un predicato nella variabile y , di cui non conosciamo né l'ambito né la quantificazione.

Invece $\forall x \in \mathbb{Z} \exists y \in \mathbb{Z} (x + y = 0)$ è davvero una proposizione (con valore logico T), che vuol dire *per ogni numero intero x esiste un numero intero y che sommato ad x dà come risultato 0*. Una formulazione più stringente (attingendo a un linguaggio più specializzato) è *ogni numero intero ha un opposto*.

Se vogliamo costruire la sua negazione, procediamo come nel caso di una variabile: l'operatore $\neg$ passa da sinistra verso destra e cambia tutti i quantificatori che incontra. Nello specifico,

$$\neg (\forall x \in \mathbb{Z} \exists y \in \mathbb{Z} (x + y = 0)) \text{ equivale a } \exists x \in \mathbb{Z} \forall y \in \mathbb{Z} (x + y \neq 0),$$

e cioè *Esiste almeno un intero x che non ha opposto*. $\square$

Questo per ciò che riguarda la prima cosa importante (ambito e quantificazione) nel trattare predicati in due variabili. In cosa consiste la seconda cosa importante, quella che riguarda l'ordine?

Esercizio 17. Consideriamo il predicato $p(x, y): x + y = 0$; è una scrittura simmetrica, ed è vero che non è importante se al posto di x scriviamo y e viceversa. Però:

- (1) Cosa vuol dire la scrittura $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} p(x, y)$?
- (2) Cosa vuol dire la scrittura $\exists y \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} p(x, y)$?
- (3) Le due proposizioni sono equivalenti?

La proposizione (1) vuol dire che per ogni numero reale x esiste il suo opposto, cioè un numero reale y tale che $x + y = 0$, ed è una proposizione vera. La (2), ottenuta dalla prima scambiando solo di posto le due quantificazioni, vuol dire che esiste un fantomatico numero reale y ($\exists y \in \mathbb{R}$) con questa curiosa proprietà: sommandolo a un qualunque numero reale x si ottiene sempre zero ($\forall x \in \mathbb{R} x + y = 0$), che è una cosa palesemente falsa. Infatti, se ciò fosse vero allora in particolare tanto per $x = 0$ quanto per $x = 1$ si dovrebbe avere $0 + y = 0$ e $1 + y = 0$. Ma allora $0 + y = 1 + y$ e, per la prima legge di equivalenza sulle uguaglianze, ciò equivale a dire che $0 = 1$, che è falso!

Di conseguenza, le scritture (1) e (2), che a un'occhiata superficiale (molto superficiale, in effetti!) sembrano la stessa cosa, in realtà sono due affermazioni molto diverse, e non equivalenti: la (1) ha valore logico T, la (2) valore logico F. $\square$

Perciò, nel caso di predicati di più variabili, l'ordine con cui si quantificano le variabili è importante: cambiare l'ordine può alterare il senso della frase, come annunciato nel secondo punto delle cose importanti per predicati di più variabili.

Esempio 1.33. Consideriamo l'affermazione

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R} \left(\left| x - \frac{\pi}{2} \right| < \delta \Rightarrow |\cos x| < \varepsilon \right).$$

Ora dovremmo essere in grado di leggerla e comprenderla: intanto, l'ambito (in parte sottinteso) è $\mathbb{R}$, ci sono due predicati in tre variabili x, δ, ε , precisamente

$$p(x, \delta, \varepsilon) : \left| x - \frac{\pi}{2} \right| < \delta \quad \text{e} \quad q(x, \delta, \varepsilon) : |\cos x| < \varepsilon,$$

e la proposizione completa (con le opportune quantificazioni) è

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (p(x, \delta, \varepsilon) \Rightarrow q(x, \delta, \varepsilon)),$$

che detta a parole recita *per ogni reale positivo ε esiste un reale positivo δ tale che per ogni numero reale x se la distanza (euclidea) di x da $\pi/2$ è minore di δ , allora il valore assoluto di $\cos x$ è minore di ε .*

Non è importante capire ORA se questa frase è importante in Matematica e perchè (questo è parte dello studio della Matematica): qui abbiamo cominciato a introdurre il linguaggio della Matematica, e per i nostri scopi essere riusciti a comprendere con precisione cosa si intendesse con quella sequenza di simboli astratti, che l'ordine con cui sono scritti è importante, e che essenzialmente è una sequenza di quantificazioni cui segue un'implicazione logica (di cui ora conosciamo il senso), è tutto quello cui potevamo ambire.

Per i curiosi che però non hanno ancora seguito un corso di Analisi Matematica, quella frase vuol dire

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos x = 0.$$

2. TERMINOLOGIA

In un qualunque libro di Matematica, per facilitare il lettore a “navigare” tra i contenuti, si usa “sezionare” il testo in paragrafi classificati da un nome specifico a seconda del ruolo che svolgono all'interno del discorso espositivo. Vediamo una breve panoramica di questa “classificazione”:

Definizioni: L'ossatura di qualunque discorso! Una definizione è l'introduzione di un concetto nuovo, specificando in modo non ambiguo e operativo cosa si intende con esso e, di solito, attribuendogli anche un nome. Normalmente, una definizione poggia su altri concetti introdotti precedentemente.

Dovrebbe esser del tutto evidente, perciò, che

- (1) non conoscere nei dettagli una definizione vuol dire non essere in grado di comprendere quelle che sono le proprietà del concetto cui si riferisce, nè enunciati e problemi che lo coinvolgono,
- (2) non è possibile studiare la Matematica procedendo “a salti”, proprio perchè ogni nuovo concetto è costruito su definizioni e proprietà antecedenti.

Per fare un esempio,⁴ consideriamo la seguente

Definizione 2.1. Si dice *campo* un **anello non banale**, **commutativo con unità** in cui ogni **elemento non nullo** è **invertibile**.

Questa è una definizione: introduce un nuovo concetto, quello di *campo*, costruendolo su concetti precedenti in modo non ambiguo e operativo (cioè, in base alla sola definizione, posso accorgermi che $\mathbb{R}$ e $\mathbb{Q}$ sono campi, mentre $\mathbb{Z}$ non lo è).

Non si può però comprendere cosa sia un *campo* se prima non si conoscono con esattezza i significati (le *definizioni*) dei termini *anello*, *anello non banale*, *anello commutativo*, *anello con unità*, *elemento non nullo di un anello*, *elemento invertibile di un anello con unità*.

Ovviamente, ciascuno di questi concetti è basato su altri concetti, per esempio

⁴Ovviamente, non avete bisogno di conoscere o imparare ora il concetto di *campo*!

Definizione 2.2. Un *anello* è una **terna ordinata** $(A, +, \cdot)$ in cui A è un **insieme non vuoto**, $+$ e $\cdot$ sono **operazioni binarie** su A tali che

- (1) $(A, +)$ è un **gruppo abeliano**;
- (2) l'operazione $\cdot$ è **associativa**;
- (3) valgono entrambe le **proprietà distributive** di $\cdot$ rispetto $+$.

Chiarirsi queste cose procedendo *a ritroso* è molto faticoso, e l'alternativa di partire “imparando” (*memorizzando la definizione 2.1* sarebbe l'espressione più adeguata) direttamente la definizione di *campo* senza conoscere i termini coinvolti dà una conoscenza illusoria: avrò, nel migliore dei casi, un'idea molto vaga di cosa sia un *campo*, magari basata su qualche esempio concreto; in realtà starò cominciando a costringere me stesso a uno studio mnemonico, vuoto e noioso, molto più faticoso del procedere a ritroso, i cui frutti saranno di brevissima durata.

Uno studio sano, invece,

- deve partire dal livello i cui concetti sono tutti conosciuti **con precisione**;
- un concetto si conosce con precisione se si sa dare di esso la **definizione esatta** (non solo un'approssimazione o un esempio);
- se dando una definizione si nota che uno dei termini coinvolti in essa non è chiaro (non si sa dare la relativa definizione), **bisogna** procedere a ritroso per colmare questo gap;
- solo **dopo esser certi** della padronanza dei concetti di un livello è possibile cominciare a studiare i concetti del livello successivo.

Nei corsi di Matematica dell'Università, il livello 0 è costituito dai contenuti della scuola secondaria (essenziali e irrinunciabili quelli del biennio); il livello 1 è costituito dallo studio della Logica e dell'Insiemistica (facce diverse della stessa medaglia). Per quanto detto, se un concetto di livello 1 dovesse mostrare che un concetto di livello 0 non è ben compreso (p.es.: non so risolvere una disequazione, non ho chiaro cosa si intenda con un *sistema di equazioni*, etc) è bene correre urgentemente a sanare questi gap. Molto spesso, comunque, l'apprendimento di un concetto di livello n aiuta a comprendere meglio, con più chiarezza e consapevolezza, i concetti di livello $n - 1$.

Teorema, Proposizione, Lemma, Corollario, Osservazione: Fermo restando che le Definizioni sono il primo e indispensabile oggetto di studio per la comprensione di un argomento, bisogna poi capire il ruolo dei concetti da esse introdotti in un assegnato contesto (p.es.: Analisi, Aritmetica, Geometria, Algebra,...). Ciò avviene enunciando delle affermazioni che li coinvolgono. Ciascuno dei termini *Teorema*, *Proposizione*, *Lemma*, *Corollario*, *Osservazione* è precisamente questo; il fatto poi che portino nomi diversi serve solo per evidenziarne la rilevanza nel contesto. Sono, quindi, tutte affermazioni dello stesso tipo: una opportuna sequenza di quantificazioni, seguita da predicati

$$p \Rightarrow q \quad \text{oppure, talvolta,} \quad p \iff q.$$

In linea di principio,

- un *Teorema* è un risultato molto importante in assoluto: quando incontrerete il *Teorema di Eulero–Fermat*, già il fatto che sia classificato come *Teorema* vi suggerirà che è un risultato importante!
- Una *Proposizione* è un risultato notevole, molto spesso funzionale all'enunciazione di un risultato più importante (un *Teorema*), ma non limitato a ciò. Il fatto che si usi lo stesso nome (Proposizione) che abbiamo usato per indicare i mattoni del linguaggio matematico non è un caso: sono cose che hanno un senso diverso (e sono distinte dall'iniziale maiuscola), ma della stessa natura;

- un *Lemma* è una proposizione (lettera minuscola!) essenzialmente tecnica, funzionale a isolare parti di una dimostrazione (vedi dopo) di un risultato più importante (una *Proposizione* o un *Teorema*) per snellirla e renderla più immediata;
- un *Corollario* è un caso particolare e rilevante di un risultato più importante (un Teorema, una Proposizione o anche un Lemma): ne è conseguenza immediata, ma spesso a fini pratici risulta anche più utile del risultato che l'ha generato;
- un' *Osservazione*, infine, è precisamente quello che la parola dice: delle piccole osservazioni illuminanti su aspetti non ovvi di un risultato appena enunciato.

Il fatto che siano proposizioni, nel senso della logica, non le rende di per sè vere: *vanno dimostrate*.

Perciò, un Teorema, Proposizione, Lemma, Corollario, Osservazione, è costituito in genere da tre sezioni:

- l'ipotesi (la p);
- la tesi (la q);
- la dimostrazione.

Dimostrazioni: Con il termine *dimostrazione* si intende una sequenza di deduzioni (implicazioni) logiche, o di argomentazioni pertinenti, formalmente corretta, e che porta dal supporre che l'ipotesi sia vera al concludere che la tesi sia *necessariamente* vera.

Con ciò, sottolineiamo che stiamo dimostrando NON che la tesi sia vera, ma che l'implicazione (la proposizione composta!) $p \Rightarrow q$ è vera.

Esempi e controesempi: visto che li abbiamo citati, spieghiamo il ruolo che essi giocano in Matematica.

- **Esempi:** Enunciata una Definizione o una Proposizione che coinvolge un concetto astratto, dare degli esempi concreti che illustrino nel particolare delle considerazioni generali è un passo fondamentale per la piena comprensione della Definizione o della Proposizione. Senza di essi, la comprensione resta grandemente limitata. In breve: *studiate bene tutti gli esempi che avete a disposizione, e createne magari degli altri*;
- **Controesempi:** dato un concetto (Definizione, Teorema), è utile approfondire anche dei *controesempi*, cioè situazioni alle quali quel concetto NON si può applicare. Per esempio, data la definizione di *gruppo* (quale essa sia, non ci interessa al momento), e dopo aver visto qualche esempio concreto di gruppi, è (sarebbe) buona cosa vedere degli esempi di strutture che NON sono gruppi (per esempio, $(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{N}, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, \cdot)$, etc), studiare cioè dei controesempi. Fare ciò serve a capire meglio quali sono le qualità essenziali del concetto appena introdotto (nell'esempio, quello di *gruppo*), e cosa accade quando una di esse viene meno. In questo modo il concetto introdotto dalla Definizione verrà assimilato con maggiore chiarezza e dettaglio.

Uso dei controesempi nelle dimostrazioni: Capiamo bene una volta e per sempre che

- *Per dimostrare che un'affermazione è vera*, bisogna costruire rigorosamente una catena di deduzioni logiche che partono dalle ipotesi e arrivano alla tesi;
- *Per dimostrare che un'affermazione è falsa* basta invece fornire un controesempio: esso costituisce già, di per sè, una dimostrazione del fatto che $p \Rightarrow q$ è falsa, potendo esibire un caso in cui p è vera ma q è falsa.

Un controesempio famoso

Il famoso matematico Pierre de Fermat si accorse che i numeri

- $2^0 + 1 = 3$,
- $2^1 + 1 = 5$,
- $2^2 + 1 = 17$,
- $2^3 + 1 = 257$,
- $2^4 + 1 = 65.537$

erano tutti numeri primi (perciò detti *primi di Fermat*) ed enunciò il

Teorema $\forall n \in \mathbb{N}$ il numero $2^{2^n} + 1$ è un numero primo.

All'epoca, il rigore in Matematica era appena agli inizi, e lo scoprire un Teorema era in molti casi più una sfida verso gli altri Matematici che il raggiungimento di una verità assoluta e dimostrabile: *io dico che ho scoperto questo, e vi sfido a mostrare il contrario*. Chiaro che, in questo modo, molti dei “Teoremi” enunciati all'epoca non verrebbero chiamati così oggi (tutt'al più verrebbero catalogati tra le *congetture*).

Nel 1732, quasi cinquant'anni dopo, un altro grande matematico, Leonhard Euler, *dimostrò* che l'affermazione di Fermat è *falsa*. Lo fece così:

$$2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 641 \cdot 6700417.$$

3. GLI INSIEMI

Con *insieme* si intende una qualunque *collezione* di *oggetti* ben specificata; tali oggetti si dicono gli *elementi dell'insieme*, o i suoi *membri*. Con le parole *ben specificata* si intende che dato un oggetto arbitrario deve essere possibile decidere in modo assoluto se esso è uno dei membri dell'insieme o no.

Esempio 3.1.

Di seguito, selezioniamo in modo non ambiguo alcuni “oggetti”, e formiamo degli “insiemi”, ciascuno denotato da un nome scelto da noi:

- (1) L'insieme A formato dai numeri 1, 2, 3, 4;
- (2) l'insieme B formato dalle persone nate nell'anno 2005;
- (3) l'insieme C formato delle persone alte più di un metro e ottanta.

Invece, per esempio,

- (1) le “persone simpatiche” non formano un insieme: mentre il criterio selettivo adottato (persona *simpatica*) sembra aver senso nel linguaggio comune, il riconoscere una persona come simpatica o meno è soggettivo;
- (2) più o meno come nel caso precedente, le *persone alte* non formano un insieme: in base a quale criterio si decide che una persona è *alta*? Si noti che completando in qualche modo la frase, per esempio con *delle persone alte 1.60m*, si ha invece un insieme nel senso vero e proprio.

Indubabilmente, il concetto di *insieme* è stato dato in modo *circolare*: dire collezione, gruppo, raccolta vuol dire usare parole differenti che esprimono lo stesso concetto. Inoltre, resta aperta la questione: *dove, e quali, sono gli oggetti con cui costruiamo gli insiemi?* Collegata a questa, resta aperta l'altra questione: *qualunque criterio, purchè non ambiguo, è valido per la costruzione di un insieme?*

Per i nostri scopi, sarà sufficiente considerare i concetti di *oggetto*, *insieme* e *appartenenza* come concetti *primitivi*, cioè innati; dal punto di vista formale, sarà sufficiente assumere che tutti gli oggetti che selezioneremo siano elementi di un grande (e non meglio specificato) *insieme universo*, che denoteremo con Ω . Quasi

tutta la Matematica, fino ai livelli più alti, si sviluppa su questi assunti, ed evita l'insorgere di pericolosi paradossi.⁵

In genere, gli insiemi sono denotati da lettere maiuscole (A, B, C , etc), e gli oggetti da lettere minuscole ($a, b, c, \dots$). Per dire che l'oggetto a è membro dell'insieme A si usa il simbolo $\in$ (che vuol dire [appartenenza](#)), si scrive $a \in A$ e si legge a [appartiene ad](#) A ; la sua negazione si scrive $a \notin A$ e si legge a [non è in](#) o [non appartiene ad](#) A .

Una volta chiarito (in qualche modo) cosa si debba intendere con i termini *insieme*, *oggetto*, *appartenenza di un oggetto a un insieme*, poniamoci un'altra domanda: come *rappresentare* un insieme?

Per gli insiemi numerici più comuni e standard vengono usati simboli particolari, che abbiamo già introdotto parlando di Logica: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$. A essi si aggiunge l'insieme $\mathbb{C}$ dei *numeri complessi*, cioè numeri della forma $a + ib$ dove a, b sono numeri reali e i (l'*unità immaginaria*) è un numero non in $\mathbb{R}$ con la proprietà che $i^2 = -1 \in \mathbb{R}$. La natura esatta dei *numeri* che li costituiscono verrà incontrata nei corsi universitari.

Quando l'insieme che dobbiamo introdurre non è uno degli insiemi standard della lista, ma è un insieme "piccolo", possiamo semplicemente elencarne gli elementi racchiudendoli tra le parentesi $\{, \}$. Quindi per esempio l'insieme costituito dai numeri 1, 2, 3, 4 lo potremo indicare esplicitamente con $A := \{1, 2, 3, 4\}$. Qui

- A indica il nome dell'insieme;
- il simbolo $:=$ indica che stiamo attribuendogli un nome (la A). E' utile scrivere $:=$ invece del solo simbolo $=$ per capire subito cosa stiamo facendo (è un'assegnazione, non un'uguaglianza);
- le parentesi $\{$ e $\}$ indicano rispettivamente l'inizio e la fine della descrizione di un insieme (e non di altri concetti);
- [1, 2, 3, 4](#) è semplicemente la lista degli elementi (i membri) che costituiscono l'insieme che avevamo in mente.

Questo modo di rappresentare gli insiemi può funzionare quando appunto l'insieme è piccolo, ma non è molto efficiente nè economico.

Pensiamoci un attimo: è proprio necessario *elencare uno per uno* tutti gli elementi di un insieme per poter dire quale insieme abbiamo in mente?

A volte sì, se l'insieme è stato costruito senza un criterio evidente, quasi "*a caso*". Per esempio, difficile dire quale sia stato il criterio con cui è stato costruito l'insieme $\{5, 7, \clubsuit, \circ, \Omega, u\}$.

Nella quasi totalità dei casi, però, quando avremo necessità di scrivere un insieme sarà perchè i suoi elementi sono accomunati da qualche proprietà particolare (per esempio: essere numeri primi). Basterà allora chiarire la proprietà che li accomuna per aver descritto bene l'insieme: preso un oggetto arbitrario x , x sarà un membro dell'insieme se e solo se x ne soddisfa la proprietà caratteristica. Perciò, la descrizione di un insieme A comporterà lo specificare una proprietà tramite un *predicato* $p(x)$ che al variare della *variabile* x nell'*ambito* del discorso ci dirà se l'oggetto x è o meno in A secondo che per quello specifico x la proposizione $p(x)$ è vera o, rispettivamente, falsa. La rappresentazione dell'insieme A individuato da una certa proprietà $p(x)$ per x che varia nell'ambito del discorso $\mathcal{D}$ avverrà con una scrittura del tipo

$$A := \{x \in \mathcal{D} \mid p(x)\}.$$

Esempio 3.2. Vogliamo descrivere l'insieme di tutte le persone nate nell'anno 2000, e indicarlo con la lettera A . In linea di principio potremmo elencarle una

⁵Per un'idea più precisa su queste tematiche si può leggere su Wikipedia l'esposizione, abbastanza accessibile, [Naive Set Theory](#)

per una, ma a parte che sarebbe una cosa lunghissima e impraticabile da fare, ci servirebbe veramente? No: l'insieme NON E' i suoi elementi, è qualcosa di nuovo, e l'unica cosa che di lui ci interessa è sapere chi ne fa parte e chi no, cioè poter decidere per ogni singolo oggetto (in questo caso: una persona) se esso è membro dell'insieme o meno. Perciò, fissato l'ambito del discorso $\mathcal{D}$ come l'insieme (!) delle persone, e detto $p(x)$ il predicato x è nato nell'anno 2000, possiamo scrivere $A := \{x \in \mathcal{D} \mid p(x)\}$. Eliminando i simboli non necessari, scriveremo

$$A := \{x \text{ persona} \mid x \text{ è nato nell'anno 2000}\}.$$

Esempio 3.3. Costruiamo l'insieme dei numeri interi pari. Il modo ingenuo di indicarlo è

$$A := \{\dots, -6, -4, -2, 0, +2, +4, +6, \dots\}$$

dove, siccome l'insieme è costituito da infiniti oggetti, abbiamo usato i puntini $\dots$ per indicare, in qualche modo, che la breve lista $-6, -4, -2, 0, +2, +4, +6$ non è l'elenco completo degli oggetti di A . In realtà, abbiamo cercato ingenuamente di indicare la *proprietà* in base alla quale abbiamo costruito A . Similmente, avessimo voluto indicare l'insieme degli interi pari compresi tra 100.000 e -50.000 , avremmo probabilmente scritto

$$B := \{-50.000, -49.998, -49.996, \dots, -2, 0, +2, \dots, +99.996, +99.998, +100.000\}$$

allo stesso scopo. Possiamo fare molto meglio di così! Ricordiamo che un numero n è *pari* se e solo se è un multiplo intero di $+2$, e questo vuol dire che esiste un numero intero k tale che $n = 2k$. Perciò, scriveremmo

$$A := \{n \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tale che } n = 2k\},$$

$$B := \{n \in \mathbb{Z} \mid (-50.000 \leq n \leq -100.000) \wedge (\exists k \in \mathbb{Z} \text{ tale che } n = 2k)\}.$$

In questo modo abbiamo descritto completamente gli insiemi A e B , perchè abbiamo descritto esplicitamente la proprietà in base alla quale li abbiamo formati: non abbiamo bisogno di scorrere l'elenco completo degli elementi di A (che è pure infinito!) e di B per scoprire che $1/2 \notin A$ e $1/2 \notin B$, mentre $-50.002 \in A$ (perchè è pari!) e $-50.002 \notin B$ (perchè -50.002 è pari, ma < -50.000), o che $+25.872$ è tanto in A quanto in B . $\square$

Esempio 3.4. Il concetto di *intervallo* è onnipresente nella Matematica della scuola secondaria superiore, in varie versioni: dati i numeri reali a e b , con $a \leq b$, scriviamo $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$, $]a, b[$ per indicare degli insiemi particolari costituiti da numeri reali (l'ambito del discorso è $\mathbb{R}$) in un modo particolarmente conciso ed efficace. Per esempio:

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}, \quad [a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}.$$

In pratica, a e b denotano l'*estremo inferiore* e l'*estremo superiore* dell'intervallo, e le parentesi quadre $[\cdot]$ dicono se essi sono membri dell'insieme o meno: $[a$ vuol dire $a \in \text{insieme}$, $]a$ invece vuol dire $a \notin \text{insieme}$; per l'estremo superiore, se $b \in \text{insieme}$ scriviamo $b]$. $\square$

In effetti, ci possono essere anche altri modi, anche migliori, di spiegare *come* è costruito un insieme e che, a rigore, non rispettano la struttura $A := \{x \in \mathcal{D} \mid p(x)\}$. Uno molto usato è del tipo $A := \{r(x) \mid x \in \mathcal{R}\}$, dove

- $\mathcal{R}$ è il range di variabilità della variabile x ;
- r è una "*regola*" che permette di costruire senza ambiguità un oggetto $r(x)$ corrispondente a un dato valore di x nel suo range di variabilità. Saremo più precisi in seguito sul senso da attribuire al concetto di *regola*;
- l'insieme A è ottenuto prendendo tutti gli oggetti $r(x)$ ottenuti facendo variare x in tutto $\mathcal{R}$.

Come sempre, un esempio vale più di mille parole:

Esempio 3.5. Abbiamo visto come scrivere l'insieme degli interi pari: $A := \{n \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tale che } x = 2k\}$. Possiamo riscriverlo in un modo ancora più chiaro:

$$A := \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Questa descrizione di A non è più della forma $\{x \in \mathcal{D} \mid p(x)\}$, ma del tipo $\{r(x) \mid x \in \mathcal{R}\}$. Nello specifico, la costruzione dice

A è l'insieme costituito da tutti i numeri $2k$ ottenuti facendo variare k tra i numeri interi in tutti i modi possibili.

In pratica, qui $\mathcal{R} = \mathbb{Z}$, e la regola r è quella che parte da $k \in \mathbb{Z}$ e costruisce $r(k) := 2k$.

Anche l'insieme B dell'esempio precedente può essere ottenuto in questo modo: osservato che se $-50.000 \leq 2k \leq +100.000$ equivale a richiedere che $-25.000 \leq k \leq +50.000$, si ha

$$B := \{2k \mid (k \in \mathbb{Z}) \wedge (-25.000 \leq k \leq +50.000)\}.$$

Il range può anche essere scritto più sinteticamente $\mathbb{Z} \ni k \in [-25.000, +50.000]$ (è un po' inusuale, ma corretto); invece, non possiamo evitare di indicare esplicitamente $k \in \mathbb{Z}$ e scrivere solo $k \in [-25.000, +50.000]$, perchè in tal caso faremmo variare k tra tutti i numeri reali nell'intervallo $[-25.000, +50.000]$, e quindi avremmo messo per esempio $2\sqrt{2}$ in A . $\square$

Esistono anche altri modi per descrivere un insieme, meno comuni di quelli appena visti, e non è importante esaminarli tutti (questi due bastano e avanzano per la quasi totalità di casi). La cosa importante invece è capire che non è affatto necessario *elenicare tutti gli elementi* di un insieme per descriverlo: basta *definire bene la proprietà in base alla quale selezioniamo i suoi elementi*. A volte, potremmo addirittura non essere nemmeno in grado di scrivere i suoi elementi singolarmente, ma lo stesso l'insieme sarebbe ben definito:

Esempio 3.6. L'insieme $A := \{x \in \mathbb{R} \mid x^7 - 3x^3 - 5 = 0\}$ è costituito da almeno un elemento, e per certo, da non più di 7: queste affermazioni conseguono da argomenti che, al momento, non è il caso di esporre ma comunque abbastanza semplici in assoluto. Tuttavia, non è possibile esplicitarne nessuno!⁶ $\square$

C'è un insieme talmente particolare da richiedere un simbolo a parte:

Definizione 3.7. L'insieme $\emptyset := \{ \}$ è detto *insieme vuoto*.

La definizione data di $\emptyset$ è la più elementare, ma non l'unica: la proprietà che lo caratterizza è che *qualunque sia l'oggetto x , è $x \notin \emptyset$* , e può essere espressa in vari modi tutti buoni

$$\emptyset = \{x \in \mathbb{R} \mid a < a\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 0\} = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 < x < 1\} = \dots$$

Non è importante *quale* tra le infinite possibilità scegliamo per definire $\emptyset$, la proprietà che lo caratterizza è che, ripetiamo, quale che sia l'oggetto x si ha $x \notin \emptyset$.

Esercizio 18. Esibire almeno 5 elementi dell'insieme

$$A := \{x \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{N} \text{ tale che } x = 4k + 3\}.$$

Esercizio 19. Elencare, se possibile, tutti gli elementi dell'insieme

$$A := \{x \in \mathbb{R} \mid (x-1)(x-2) = 0\}.$$

⁶per curiosità, in A c'è esattamente un elemento, che non può essere identificato meglio che come *l'unica radice reale di $x^7 - 3x^3 - 5$* , a meno di non accontentarsi di sue approssimazioni decimali

Esercizio 20. Elencare esplicitamente tutti gli elementi dell'insieme

$$A := \{x \in \mathbb{R} \mid (x > 0) \wedge (x^2 = 3)\}.$$

Esercizio 21. Elencare almeno 5 elementi dell'insieme

$$A := \{\sqrt{x-1} \mid x \in [1, 2]\}.$$

Esercizio 22. (*Equazioni di primo grado*)

Quali sono le soluzioni dell'equazione $2x - 3 = 0$ in $\mathbb{R}$? In $\mathbb{Q}$? In $\mathbb{Z}$?

Esercizio 23. (*Equazioni di secondo grado*)

Risolvere le equazioni $2x^2 - 3x + 2 = 0$ e $2x^2 - 7x + 3 = 0$.

Talvolta, un problema può ammettere un insieme delle soluzioni che è infinito:

Esercizio 24. (*Disequazioni lineari*)

Risolvere la disequazione $3x - 2 < 4x + 7$.

In generale, si tenga presente che un'equazione, una disequazione, o un sistema sono **problemi**, e che risolverli vuol dire precisamente **descrivere l'insieme delle loro soluzioni**, nel modo più esplicito possibile. Le tecniche risolutive apprese nella scuola secondaria hanno precisamente questo come scopo, ed è bene averlo sempre presente: imparare una tecnica o delle manipolazioni senza capirne lo scopo è solo una parvenza di conoscenza, faticosa, mnemonica e sostanzialmente inutile.

3.1. Confronto tra insiemi. Dati due numeri, siamo abituati al fatto che è sempre possibile confrontarli, cioè stabilire se uno dei due è più grande dell'altro o se sono uguali. Non ci sono altre eventualità, nell'ambito dei numeri reali. Farlo è, di regola, semplice, anche se non sempre ovvio:

Esercizio 25. Confrontare i numeri

- (1) -2 e $-15/7$;
- (2) $12/13$ e $6/7$;
- (3) $\sqrt[3]{3}$ e $7/5$.

Possiamo effettuare confronti anche tra insiemi; tuttavia, dobbiamo prima chiarire bene qual è il criterio del confronto. In effetti, c'è più di un modo per confrontare tra loro due insiemi, e l'esito del confronto tra gli insiemi A e B può essere diverso a seconda di ciò che intendiamo. Qui esaminiamo il modo più ovvio:

Definizione 3.8. Dati gli insiemi A e B , diciamo che A è contenuto in B , o che B contiene A , o ancora che A è un sottinsieme di B , o infine che A è una parte di B , e scriviamo sinteticamente $A \subseteq B$, se e solo se

$$\forall a \in A \quad a \in B,$$

cioè se ogni elemento di A è anche elemento di B . Nel caso ciò non avvenga, diciamo che A non è contenuto in B (o che B non contiene A), e scriviamo $A \not\subseteq B$.

Esplicitamente, dire che $A \not\subseteq B$ vuol dire che

$$\exists x \in A \text{ tale che } x \notin B$$

(la negazione di $(\forall x \in A \quad a \in B)$). Il simbolo $\subseteq$ è detto *simbolo di inclusione*, ed è stato scelto per ricordare graficamente il simbolo usato normalmente per il confronto tra numeri, $\leq$, di cui è una modifica.

Come si fa, allora, a confrontare (rispetto l'inclusione) degli assegnati insiemi A e B , cioè a decidere se $A \subseteq B$ o meno? Se A è dato attraverso una lista esplicita dei suoi elementi (per esempio, se A ha "pochi" elementi), basta scorrerla e controllare che ciascun elemento di A sia anche in B . Facile! Ma non sempre attuabile.

Esempio 3.9.

Dati $A := \{0, 1/2, \sqrt{3}\}$, $B := \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 4\}$, $C := \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 > 0\}$, risulta $A \subseteq B$, ma $A \not\subseteq C$:

- Poichè $0^2 = 0 < 4 \Rightarrow 0 \in B$; similmente, $(1/2)^2 = 1/4 < 4$ e $(\sqrt{3})^2 = 3 < 4$, per cui ciascun elemento di A è un elemento di B , e possiamo scrivere $A \subseteq B$;
- invece, $A \not\subseteq C$, perchè anche se $1/2$ e $\sqrt{3}$ sono in C , tuttavia $0^2 = 0$ non è > 0 , e quindi l'elemento 0 di A non è un elemento di C . Quindi $A \not\subseteq C$.

In generale, però, sappiamo che un insieme non sarà descritto da una lista di elementi e, se pure fosse, non è detto che sia abbastanza piccolo da permetterci di controllarli uno per uno!

Esercizio 26. Dati gli insiemi $A := \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$ e $B := \{4k + 3 \mid k \in \mathbb{Z}\}$, decidere se $A \subseteq B$ o $B \subseteq A$.

Svolgimento. Se x è un arbitrario elemento in B , deve esistere un certo $k \in \mathbb{Z}$ tale che $x = 4k + 3$. Poichè $x = 2(2k + 1) + 1$, e $\bar{k} := 2k + 1$ è un intero $\Rightarrow x \in A$. Dato che ciò vale qualunque sia l'elemento $x \in B$, possiamo concludere che $B \subseteq A$. Tuttavia, è facile provare che $A \not\subseteq B$. $\square$

Il confronto per inclusione tra insiemi condivide alcune proprietà del confronto usuale tra numeri ma, essendo altro, non possiamo aspettarci che la situazione sia proprio la stessa! Eccone un esempio:

Esempio 3.10. Prendiamo gli insiemi A, B, C dell'esempio 3.9: è abbastanza chiaro che $B \not\subseteq A$ e $C \not\subseteq A$, ma che dire del confronto tra B e C ? E' immediato rendersi conto che, in effetti, $B \not\subseteq C$ e $C \not\subseteq B$.

Quest'ultimo esempio evidenzia una caratteristica di questo confronto tra insiemi che non si presentava nel confronto tra numeri: **non è detto che due insiemi siano necessariamente confrontabili tramite inclusione**. In tal caso, appunto, gli insiemi si dicono *non confrontabili*.

Il confronto per inclusione permette anche di definire con semplicità il concetto di *uguaglianza* tra insiemi:

Definizione 3.11. Dati gli insiemi A e B , diciamo che essi sono **uguali** se e solo se $(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$.

In altre parole, gli insiemi A e B si dicono *uguali* se ogni elemento di A è anche elemento di B , e ogni elemento di B è a sua volta elemento di A . Un modo (un po' troppo) sintetico per esprimere ciò è dire che **A e B si dicono uguali se e solo se hanno gli stessi elementi**. Questa espressione però è un po' traditrice: funziona bene se gli insiemi hanno pochi elementi, elencati esplicitamente, ma per insiemi qualunque tende a confondere le acque e a far sembrare difficile ciò che invece è semplice. Perciò, è bene appoggiarsi alla definizione "ufficiale", e controllare separatamente che siano valide entrambe le inclusioni.

Tutta una serie di variazioni sul simbolo di inclusione, che ricalcano quel che facciamo di solito con il simbolo $\leq$, sono disponibili: scrivere $A \subseteq B$ vuol dire la stessa cosa che scrivere $B \supseteq A$ (qui, possiamo dire che **B contiene A** oppure restare fedeli alla frase **A è contenuto in B** : è lo stesso); per dire che $A \subseteq B$ ma $A \neq B$ possiamo scrivere $A \subset B$ e dire che A è un sottinsieme **proprio** di B , ma è più sicuro scrivere $A \subsetneq B$, in modo da togliere ogni dubbio.

L'insieme vuoto, rispetto l'inclusione, gode di una proprietà unica: **$\emptyset$ è contenuto in tutti gli insiemi**. Infatti, se per un dato insieme A risultasse $\emptyset \not\subseteq A$, allora dovremmo poter esibire un elemento del primo insieme, $\emptyset$, che non appartiene al

secondo, A . Dato che non c'è alcun elemento in $\emptyset$, in particolare non c'è alcun elemento da poter esibire e, quindi, $\emptyset \subseteq A$.

Vediamo un esempio concreto di come si fa a verificare l'uguaglianza tra due insiemi quando non è possibile confrontare le liste esplicite dei loro elementi:

Esercizio 27. Assegnati gli insiemi $A := \{4k - 3 \mid k \in \mathbb{Z}\}$ e $B := \{4k + 5 \mid k \in \mathbb{Z}\}$, provare che $A = B$.

Svolgimento. Entrambi gli insiemi sono infiniti, per cui è illusorio pensare di poter verificare elemento per elemento che essi contengano gli stessi oggetti. Usiamo invece la definizione di uguaglianza tra insiemi, e cioè controlliamo separatamente che $A \subseteq B$ e che $B \subseteq A$; fatto ciò, ai sensi della definizione possiamo scrivere $A = B$.

Proviamo che $A \subseteq B$: se $a \in A$ vuol dire che esiste un certo intero $k \in \mathbb{Z}$ tale che $a = 4k - 3$, e per far vedere che $a \in B$ dobbiamo esibire un opportuno $h \in \mathbb{Z}$ che ci permetta di scrivere $a = 4h + 5$. Dobbiamo cioè cercare un h (che quindi è la nostra incognita!) che sia soluzione del problema (equazione!) $4k - 3 = 4h + 5$. Applicando il primo principio di equivalenza per uguaglianze, esso è equivalente al problema $4h = 4k - 8$, cioè $4h = 4(k - 2)$, e pertanto basta scegliere $h = k - 2$.

Proviamo ora che $B \subseteq A$: se $b = 4k + 5 \in B$ e vogliamo che $b \in A$ deve esistere un $h \in \mathbb{Z}$ tale che $4k + 5 = 4h - 3$, cioè tale che $4h = 4k + 8$, il che fornisce la soluzione $h = k + 2$. Da ciò consegue che $b \in A$, e quindi $B \subseteq A$. Poichè $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$, per definizione possiamo scrivere $A = B$. $\square$

Vediamo qualche altro piccolo ma istruttivo esercizio:

Esercizio 28. Si considerino gli insiemi $A := \{2, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 2\}$ e $B := \{2, 3\}$. E' vero che $A = B$?

Svolgimento. Certamente $B \subseteq A$: entrambi gli elementi 2 e 3 che costituiscono B sono in A . Però, si noti che essi sono anche gli unici elementi che compaiono in A : sono scritti ripetutamente, ma non ce ne sono altri, e ciascuno di essi è anche in B . Perciò, anche $A \subseteq B$ è vero, e quindi $A = B$. $\square$

Da questo esercizio (che può agevolmente essere riscritto in termini generali) si capisce che **non è importante quante volte scriviamo uno stesso elemento nell'elenco degli oggetti dell'insieme A , perchè l'insieme non cambia**. L'unica differenza consiste nel decidere se un oggetto x è in A o non è in A : se $x \in A$, affermarlo una, 10, 1000 o infinite volte non cambia la sostanza nè ingrandisce A !

Esercizio 29. Siano $A := \{1, 2, 3\}$, $B := \{2, 1, 3\}$ e $C := \{3, 1, 2\}$. E' vero o no che $A = B = C$?

Svolgimento. Di nuovo, basta applicare la definizione di uguaglianza tra insiemi e controllare (cosa molto facile, qui!) che $A \subseteq B$ e che $B \subseteq A$ per concludere che $A = B$. Allo stesso modo, si prova che $B = C$, e quindi automaticamente A , B , C saranno pure scritti in modo diverso, ma sono esattamente lo stesso insieme. $\square$

Anche quest'esercizio ci insegna qualcosa di generale: **non è importante in che ordine elenchiamo gli oggetti che costituiscono un insieme**, perchè cambiarlo non cambia l'insieme.

Alla luce di queste osservazioni, è chiaro che siamo molto liberi nello scrivere la lista esplicita degli elementi di un insieme: possiamo scriverne gli elementi nell'ordine che preferiamo, e eventualmente anche scriverli ripetutamente, perchè l'insieme ottenuto non cambia.

3.2. Nuovi insiemi a partire da insiemi dati: operazioni insiemistiche.

Sono tanti i modi con cui possiamo costruire nuovi insiemi; questa flessibilità costituisce una delle ragioni principali per le quali l'insiemistica svolge un ruolo così importante in tutta la Matematica, e non solo in essa. Tra tutti questi modi, alcuni sono simili a ciò che chiamiamo *operazioni* tra numeri:

Definizione 3.12. (*Unione*)

Dati gli insiemi A e B , si dice **unione di A e B** , e si denota con $A \cup B$, l'insieme

$$A \cup B := \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}.$$

In altri termini, $A \cup B$ è l'insieme costituito dagli oggetti che sono **in A o in B** (o in entrambi).

E' chiaro che $A \subseteq A \cup B$, così come pure $B \subseteq A \cup B$.

Definizione 3.13. (*Intersezione*)

Dati gli insiemi A e B , si dice **intersezione di A e B** , e si denota con $A \cap B$, l'insieme

$$A \cap B := \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}.$$

In altri termini, $A \cap B$ è l'insieme costituito dagli oggetti **in comune tra A e B** .

E' chiaro che, quali che siano A e B , risulta $A \cap B \subseteq A$, così come pure $A \cap B \subseteq B$.

Esempio 3.14. Siano $A := \{1, 4, 7\}$, $B := \{1, 4, 8, 9\}$. Allora $A \cup B = \{1, 4, 7, 8, 9\}$, e $A \cap B = \{1, 4\}$.⁷ $\square$

Definizione 3.15. Gli insiemi A e B si dicono **disgiunti** se $A \cap B = \emptyset$.

Naturalmente, se A e B NON sono disgiunti, ciò vuol dire che esiste almeno un elemento x che è sia in A che in B . Se A e B sono disgiunti, allora un elemento di $A \cup B$ è o esclusivamente in A , o esclusivamente in B .

Unione e intersezione insiemistica sono delle vere operazioni tra insiemi: a partire da due oggetti (insiemi), costruiscono un nuovo oggetto (insieme), nè più nè meno di come addizione e moltiplicazione fanno a partire da due oggetti (numeri) e producendo un nuovo oggetto (numero), dello stesso tipo di quelli iniziali. Come per $+$ e $\cdot$, anche $\cup$ e $\cap$ godono di alcune proprietà che è utile conoscere; alcune sono caratteristiche dell'operazione, qualcun'altra le lega tra di loro:

Proposizione 3.16. *Nel seguito, siano A, B, C insiemi qualunque. Si ha:*

- $\cup$ e $\cap$ sono **idempotenti**: $A \cup A = A$, $A \cap A = A$
- $\cup$ e $\cap$ sono **commutative**: $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$
- $\cup$ e $\cap$ sono **associative**: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- $\cup$ e $\cap$ sono **mutuamente distributive**:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad e \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Esercizio 30. Dimostrare la precedente Proposizione.

L'ultima operazione di base tra insiemi è

Definizione 3.17. (*Differenza insiemistica*)

Dati gli insiemi A, B , si dice **differenza insiemistica tra A e B** (prima A e poi B !), e si denota con $A \setminus B$, l'insieme

$$A \setminus B := \{a \in A \mid a \notin B\}.$$

In altri termini, $A \setminus B$ è il sottinsieme costituito dagli elementi di A che NON sono in B .

⁷si noti la diversa scrittura $:=$ o $=$, a seconda che si stia *definendo* l'insieme ($A := \{1, 4, 7\}$) o si stia *determinando* l'insieme ($A \cup B$).

Chiaro che se A e B sono disgiunti allora l'operazione $A \setminus B$ ridà l'insieme A ; in genere, però, $(A \setminus B) \subseteq A$ e $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$. Si tenga anche presente che $A \setminus B \neq B \setminus A$: l'operazione di differenza insiemistica, a differenza di $\cup$ e $\cap$, NON è commutativa, per cui è importante l'ordine con cui vengono nominati gli insiemi.

Esempio 3.18. Se A e B sono gli insiemi dell'Esempio 3.14, si ha

$$A \setminus B = \{7\}, \quad B \setminus A = \{8, 9\}. \square$$

Definizione 3.19. (Complementare di un sottinsieme)

Se $B \subseteq A$, l'insieme $A \setminus B$ viene denotato con $\mathcal{C}_A(B)$ e vien detto il **complementare** di B in A .

Dato che per assunzione tutti gli oggetti che consideriamo sono membri di un insieme universo Ω , se A è un insieme scriveremo $\mathcal{C}(A)$, e parleremo semplicemente di **complementare** di A , invece che più propriamente di complementare di A in Ω .

Tornando al passaggio al complementare, l'aver introdotto il concetto di insieme universo consente di riscrivere l'operazione $\setminus$ in modo più efficace: dati gli insiemi A e B (entrambi, come detto, sottinsiemi di Ω), risulta

$$A \setminus B = A \cap \mathcal{C}(B).$$

Esercizio 31. Dimostrare la precedente affermazione.

Abbiamo perciò essenzialmente tre operazioni insiemistiche: $\cup$, $\cap$ e $\mathcal{C}$, e già conosciamo le più basilari proprietà di $\cup$ e $\cap$, comprese quelle che regolano le loro interazioni (le leggi di mutua distributività). E' tempo di conoscere le proprietà di base di $\mathcal{C}$ e come interagisce con $\cup$ e $\cap$:

Proposizione 3.20. Siano A e B insiemi.

- $\mathcal{C}$ è **involutoria**: $\mathcal{C}(\mathcal{C}(A)) = A$;
- **leggi di De Morgan**: $\mathcal{C}(A \cup B) = \mathcal{C}(A) \cap \mathcal{C}(B)$ e $\mathcal{C}(A \cap B) = \mathcal{C}(A) \cup \mathcal{C}(B)$.

Osservazione 3.21. Le proprietà di $\cap$, $\cup$ e $\mathcal{C}$ sono sovrapponibili alle proprietà di $\wedge$, $\vee$ e $\neg$, rispettivamente. Ciò non è un caso: logica e insiemistica sono linguaggi differenti che si sviluppano su una stessa dicotomia, tra T e F nel primo caso, $\in$ e $\notin$ nel secondo. La cosa è evidente nella scrittura stessa della definizione di $\cap$ e $\cup$, e consente di interpretare “visivamente” il concetto di **implicazione logica**: $A \subseteq B$ è la versione insiemistica di $A \Rightarrow B$, così come $A = B$ quello di $A \iff B$ (dove A e B sono, a seconda dei casi, insiemi o proposizioni).

E' da questa intuizione di Eulero che sono nati i cosiddetti diagrammi di Eulero-Venn. Quindi, da un certo punto di vista, Logica e Insiemistica sono due facce di una stessa realtà descritta in linguaggi diversi. Tuttavia,

- (1) il linguaggio adottato influenza la profondità dello studio della realtà: come vedremo, il linguaggio degli insiemi rende possibile la costruzione di concetti estremamente potenti e generali in un modo molto semplice e naturale;
- (2) c'è un terzo linguaggio ad affiancare Logica e Insiemistica, quello delle Algebre Booleane: non sarà oggetto di queste note, ma va almeno tenuto presente che è grazie a questo linguaggio che si sono potuti realizzare gli odierni computer. $\square$

Le operazioni insiemistiche consentono di costruire nuovi insiemi a partire da insiemi assegnati, ma solo fino a un certo punto:

Esercizio 32. Siano $A := \{1, 2\}$ e $B := \{2, 3\}$, $\Omega := \{1, 2, 3, 4\}$. Quali insiemi si possono costruire usando le operazioni $\cup$, $\cap$ e $\mathcal{C}_\Omega$?

Le nozioni insiemistiche esposte in questa sezione sono state in realtà già incontrate diffusamente, in modo più o meno consapevole, nel corso della scuola media secondaria. Qui ne vediamo solo due esempi:

Esercizio 33. Risolvere il sistema

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 3 \geq 0 \\ 2x - 4 > 3x + 7 \end{cases}.$$

Esercizio 34. Risolvere la disequazione

$$\frac{2x-1}{3x+4} \leq 1.$$

3.3. Nuovi insiemi a partire da insiemi dati: l'insieme delle parti.

Nel definire un insieme, abbiamo grande flessibilità sulla natura degli oggetti da selezionare: in particolare, possiamo costruire insiemi i cui oggetti siano altri insiemi.

Esempio 3.22. Dati $A = \{x\}$, $B = \{1\}$, $C := \{2, 3\}$ possiamo formare l'insieme $\mathcal{A} := \{A, B, C, \emptyset, 1\}$, cioè esplicitamente

$$\mathcal{A} = \{\{x\}, \{1\}, \{2, 3\}, \emptyset, 1\}.$$

Da notare che è vero sia che $\emptyset \subseteq \mathcal{A}$, sia che $\emptyset \in \mathcal{A}$. Ancora, è vero tanto che $1 \in \mathcal{A}$ quanto che $\{1\} \in \mathcal{A}$, quanto ancora che $\{1\} \subseteq \mathcal{A}$. E' invece falso che $x \in \mathcal{A}$. Così pure, $2, 3 \notin \mathcal{A}$, e $\{2\}, \{3\} \notin \mathcal{A}$, mentre $\{2, 3\} \in \mathcal{A}$. $\square$

Non dovrebbe essere difficile ora capire il seguente esempio:

Esempio 3.23. Gli insiemi $\emptyset$ e $\{\emptyset\}$ sono diversi: $\emptyset$ è l'insieme vuoto, ma $\{\emptyset\}$ no!

Automaticamente, pure vero è che $\{\{\emptyset\}\} \neq \{\emptyset\}$. Possiamo perciò continuare ad aggiungere le parentesi, considerando $\{\{\{\emptyset\}\}\}$, $\{\{\{\{\emptyset\}\}\}\}$, ... ottenendo insiemi sempre diversi (e di livello sempre più alto, per così dire).

Sempre sullo stesso tema, si consideri il seguente

Esempio 3.24. Gli insiemi $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ sono a due a due distinti, e più precisamente

$$\emptyset \subsetneq \{\emptyset\} \subsetneq \{\emptyset, \{\emptyset\}\}.$$

La catena si può allungare: detto $A_0 := \emptyset$, poniamo $A_1 := A_0 \cup \{A_0\}$, e poi $A_2 := A_1 \cup \{A_1\}$, $A_3 := A_2 \cup \{A_2\}$, ... e più in generale $A_n := A_{n-1} \cup \{A_{n-1}\}$, ottenendo infiniti insiemi tutti a due a due distinti e, in più, $A_0 \subsetneq A_1 \subsetneq A_2 \subsetneq A_3 \subsetneq \dots$.

In altri termini, siamo partiti dall'insieme più piccolo in assoluto – l'insieme vuoto – e abbiamo costruito in questa maniera infiniti insiemi uno più grande dell'altro, tutti a due a due distinti. Esplicitamente,

$$\emptyset \subsetneq \{\emptyset\} \subsetneq \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \subsetneq \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \subsetneq \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$$

etc. $\square$

La costruzione appena vista è il modello di base con il quale è costruito l'insieme dei numeri naturali, $\mathbb{N}$, ma non è questa la sede opportuna per discuterne i dettagli.

L'idea di usare insiemi assegnati come oggetti con cui costruire nuovi insiemi rende possibile dare la seguente

Definizione 3.25. Sia X un insieme. Si dice **insieme delle parti** (o **insieme potenza**) di X , e si denota con $\wp(X)$ (su alcuni testi con 2^X), l'insieme

$$\wp(X) := \{A \mid A \subseteq X\},$$

cioè l'insieme i cui oggetti sono tutti i possibili sottinsiemi di X .

Si noti che, ovviamente, $X \in \wp(X)$, perchè $X \subseteq X$; sempre ovviamente, $\emptyset \in \wp(X)$ perchè $\emptyset \subseteq X$.

Esempio 3.26. Calcoliamo l'insieme delle parti per alcuni insiemi “piccoli”:

- $\wp(\emptyset) = \{\emptyset\}$;
- $\wp(\{a\}) = \{\emptyset, \{a\}\}$;
- $\wp(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.

Quanti elementi ci sono in $\wp(X)$, quando X ha 10 elementi? Se l'intuizione avuta è corretta, dovrebbe diventare chiaro perchè $\wp(X)$ si chiama insieme *potenza* di X , e perchè talvolta lo si indica con 2^X .

L'insieme $\wp(X)$ vien detto insieme delle *parti* di X perchè la parola *parte*, riferita a un insieme X , è sinonimo di *sottinsieme*. Per evitare di ripetere la parola insieme dicendo *l'insieme dei sottinsiemi di X* si è preferito dire *l'insieme delle parti di X* . Più in generale, per indicare un insieme i cui oggetti sono altri insiemi, si evita la locuzione *un insieme di insiemi* e si preferisce parlare di una *famiglia* di insiemi. Quindi, potremmo dire correttamente che $\wp(X)$ è la famiglia delle parti di X .

Osservazione 3.27. E' bene chiarirsi una volta per tutte che

- dire che $x \in X$ vuol dire che $\{x\} \subseteq X$;
- dire che $A \subseteq X$ vuol dire che $A \in \wp(X)$.

Perciò, dire $x \in X$, $\{x\} \subseteq X$ o $\{x\} \in \wp(X)$ sono tre affermazioni equivalenti.

3.4. Nuovi insiemi a partire da insiemi dati: il prodotto cartesiano.

Un altro modo, estremamente importante, di costruire nuovi insiemi a partire da insiemi assegnati è costruito sul concetto di *coppia ordinata*:

Definizione 3.28. Dati gli oggetti $x, y \in \Omega$, diciamo *coppia ordinata di prima entrata x e seconda entrata y* , e la denoteremo con (x, y) , l'insieme

$$(x, y) := \{x, \{x, y\}\}.$$

Notare che

- se $x = y$, si ha $(x, x) = \{x, \{x\}\}$, e siccome $x \neq \{x\}$, l'insieme $\{x, \{x\}\}$ non collassa in un insieme con un unico oggetto, $\{x\}$;
- poichè $\{x, \{x, y\}\} \neq \{y, \{x, y\}\}$ se $x \neq y$ (perchè $x \in \{x, \{x, y\}\}$ ma $x \notin \{y, \{x, y\}\}$), le coppie ordinate (x, y) e (y, x) sono distinte.

In linguaggio informale, una coppia ordinata è costituita da una *sequenza* di due elementi (cioè, ci interessa non solo *quali* elementi, ma anche *in quale ordine* sono scritti).

Esercizio 35. Verificare che, in base alla definizione data, le coppie ordinate (x, y) e (u, v) sono uguali, e scriviamo $(x, y) = (u, v)$, se e solo se $x = u$ e $y = v$.

Quindi due coppie ordinate sono uguali se e solo se posto per posto le due coppie recano lo stesso elemento: basta che *in un singolo posto* le due coppie presentino un elemento differente a far sì che le due coppie siano da considerare diverse. Perciò, $(1, 2) \neq (2, 1)$, anche se in entrambe compaiono gli stessi oggetti 1, 2.

Definizione 3.29. Dati gli insiemi A, B , si dice *prodotto cartesiano di A per B* (nominando A e B in questo ordine!) e si denota con $A \times B$, l'insieme

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

In altre parole, $A \times B$ è l'insieme costituito da tutte le coppie ordinate costruibili scegliendo la prima entrata in A e la seconda entrata in B .

Esempio 3.30. Sia $A := \{1, 2, 3\}$ e $B := \{a, b\}$. Allora

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$$

$$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$$

sono i due possibili prodotti cartesiani costruiti sugli insiemi assegnati A e B . Risulta $A \times B \neq B \times A$. Allo stesso modo, nessuno degli elementi (coppie ordinate) che costituiscono $B \times A$ è in $A \times B$.

E' evidente che in ciò il fatto che in una coppia ordinata ci interessa l'*ordine* con cui si susseguono gli elementi è essenziale, e si riflette nel rendere $A \times B$ diverso da $B \times A$. $\square$

Solo in un caso un prodotto cartesiano può essere l'insieme vuoto: se uno tra A e B è lui stesso l'insieme vuoto. In tal caso, infatti, NON si possono formare elementi di $A \times B$ nè di $B \times A$, perchè se $A = \emptyset$ non ci sono elementi da prendere in A per formare nè una coppia (a, b) nè una coppia (b, a) .

Una volta introdotto il concetto di *coppia ordinata*, semplice ma che introduce una qualità concettuale nuova (espressa nelle parole *prima* e *dopo*), non c'è alcuna difficoltà nel considerare delle ovvie generalizzazioni, precisamente quelle di *terne ordinate*, *quaterne ordinate* etc. Per esempio, assegnare una terna ordinata consiste nel collocare in tre posti consecutivi degli oggetti (distinti o meno), registrando non solo *quali* sono gli elementi scelti, ma anche *in quale posto* ciascuno di essi è collocato. Così, $(1, 2, 1)$ è una terna ordinata, ed è distinta dall'altra terna ordinata $(1, 1, 2)$ perchè nel posto 2 esse recano oggetti diversi. Si ha così la altrettanto ovvia generalizzazione a prodotti cartesiani con più di due "fattori", cioè $A \times B \times C$, $A \times B \times C \times D$ etc, intesi rispettivamente come l'insieme di tutte le terne ordinate in cui la prima entrata è scelta in A , la seconda in B , la terza in C , oppure le quaterne ordinate in cui la prima entrata è scelta in A , la seconda in B , la terza in C e la quarta in D , etc.

Nella scuola secondaria, il concetto di prodotto cartesiano è presente in praticamente tutti i singoli argomenti di Matematica, ma non viene quasi mai citato esplicitamente. Per esempio, quando si considera la somma tra due numeri reali (o razionali, o naturali) quel che davvero si fa è partire da una coppia ordinata (a, b) di numeri reali (cioè, un elemento di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$) e costruire un numero reale in sua corrispondenza (l'elemento $a + b$, detto *somma* di a e b). E' per questo che poi si enuncia esplicitamente la *commutatività della somma*: partendo dalle coppie ordinate (a, b) o (b, a) , si ottiene lo stesso elemento (la stessa somma) $a + b$. Normalmente, la parte che riguarda il coinvolgimento del concetto di coppia ordinata viene "nascosta" per evitare di introdurre complicazioni, e si dice semplicemente $\forall a, b \in \mathbb{R} \ a + b = b + a$.

La prima occasione in cui il concetto di coppia ordinata viene utilizzato più significativamente, ma in genere non esplicitamente, è quando vengono studiati i sistemi di equazioni in più incognite (tipicamente, in due incognite):

Esercizio 36. Risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ x - 3y = 5 \end{cases}$$

Svolgimento. Cosa si debba intendere con *sistema* è già stato detto: si tratta di determinare l'intersezione tra gli insiemi delle soluzioni dei problemi che lo costituiscono. Perciò, l'attenzione si sposta sui problemi costituenti: qui, sono rispettivamente $2x + 3y = 4$ e $x - 3y = 5$. Ciascuno di essi è un'equazione di primo grado, solo che è in *due* incognite: x e y . La prima domanda cui rispondere, perciò, è: *cosa devo intendere come soluzione di $2x + 3y = 4$?*

Ovviamente, l'insieme in cui x ed y devono essere scelti è tacitamente assunto essere $\mathbb{R}$, come in (quasi) tutti i problemi di scuola secondaria. Il fatto è che, essendoci due incognite, una soluzione non può consistere di un numero reale: ce ne devono essere due, da assegnare a ciascuna incognita. Per esempio, dire che **1 è una soluzione dell'equazione $2x + 3y = 4$** non ha alcun senso! Al posto di chi dovrebbe essere sostituito? Di x ? Di y ? Di entrambi? Ma anche affermare che

0 e 2 sono una soluzione dell'equazione $2x + 3y = 4$, pur esibendo due numeri e non uno solo, non è che abbia gran senso: a chi devo sostituire 0? A x o a y ? Le cose cambiano infatti radicalmente scegliendo l'una o l'altra alternativa: se a x sostituiamo 0 e a y sostituiamo 2 si ha $2 \cdot 0 + 3 \cdot 2 = 6 \neq 4$, mentre se facciamo l'inverso otteniamo $2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 = 4$, che somiglia molto a ciò che ci aspettiamo essere una *soluzione* dell'equazione.

In effetti, x e y sono due incognite distinte (per cui una soluzione deve esser costituita da una coppia di valori) e giocano ruoli differenti nell'equazione (e quindi non sono interscambiabili). La corretta definizione di ciò che deve essere una soluzione dell'equazione $2x + 3y = 4$ è perciò che deve essere una *coppia ordinata* $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tale che $2a + 3b = 4$ (la prima entrata deve esser sostituita in x , la seconda in y). Quindi l'insieme delle soluzioni dell'equazione $2x + 3y = 4$ è

$$S_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 2x + 3y = 4\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Possiamo riscrivere più esplicitamente tale insieme, trattando una delle due entrate come parametro. Per esempio, usando la x come parametro e scrivendo

$$S_1 = \left\{ \left(x, \frac{4 - 2x}{3} \right) \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

(palesamente un insieme con infiniti elementi). Allo stesso modo, l'altra equazione ha come insieme delle soluzioni $S_2 = \{(5 + 3y, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ (stavolta abbiamo usato la y come parametro), e quindi l'insieme che cerchiamo (delle soluzioni del sistema) è $S := S_1 \cap S_2$, un sottinsieme di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Ovvio che, anche se $S_1, S_2 \neq \emptyset$, può ben accadere che essi siano disgiunti, e quindi che il sistema non abbia soluzioni (o, per usare il termine più comunemente usato nella scuola secondaria, che sia *incompatibile*).

Vediamo come determinare S : per ogni $y \in \mathbb{R}$, l'elemento (coppia ordinata) $(5 + 3y, y)$ è un elemento di S_2 , cioè una soluzione della seconda equazione; affinché esso lo sia anche della prima, deve accadere che $2(5 + 3y) + 3y = 4$, e cioè che $y = -2/3$. Ciò vuol dire che mentre tutte le coppie ordinate $(5 + 3y, y)$ ottenute al variare di $y \in \mathbb{R}$ sono soluzioni della seconda equazione, solo quelle ottenute quando y vale $-2/3$ sono anche soluzioni della prima, e quindi sono in S . L'unica coppia ordinata corrispondente a $y = -2/3$ è precisamente la coppia $(3, -2/3)$, per cui $S = \{(3, -2/3)\}$.

Nella scuola secondaria, ciò viene scritto di solito come

$$S : \begin{cases} x = 3 \\ y = -\frac{2}{3} \end{cases},$$

e il metodo usato nel nostro ragionamento viene detto *metodo di risoluzione per sostituzione*, anche se in genere viene presentato diversamente, da un punto di vista più computazionale e meno concettuale. Ovviamente, allo stesso risultato si sarebbe giunti partendo dal fatto che per ogni $x \in \mathbb{R}$ la coppia ordinata $(x, (4 - 2x)/3)$ è in S_1 , e solo per $x = 3$ la coppia ordinata corrispondente è in S .

Sono in effetti varie le tecniche possibili per risolvere un sistema, e non è questa la sede per illustrarle tutte. Il metodo di sostituzione è forse il più “*calcoloso*”, ma anche quello che ha in genere una più vasta applicabilità. Tuttavia, la cosa importante è capire che un sistema di equazioni (o disequazioni, o misto) in due (o tre, o quattro, etc) incognite ha come soluzione un'insieme di coppie ordinate (o di terne, o quaterne, etc ordinate, secondo quante sono le incognite che compaiono nel sistema).

Un errore MOLTO comune è quello di guardare, invece che a coppie ordinate, ai singoli valori delle incognite, e interpretare per esempio $(3, -2/3)$ come *due* soluzioni: $x = 3$ e $y = -2/3$!!! Ciò è palesamente un nonsense! $\square$

C'è un punto preciso dei programmi di scuola secondaria in cui il prodotto cartesiano interviene esplicitamente: quando si introduce la cosiddetta *Geometria Analitica*: l'intuizione di Cartesio fu che è possibile riscrivere la Geometria in termini algebrici, e in ciò il prodotto cartesiano è esattamente quel che rende possibile il passaggio. Più precisamente:

- fissato un riferimento cartesiano si può identificare ogni punto del piano geometrico con esattamente una coppia ordinata di numeri reali. Perciò **punto geometrico=coppia ordinata**;
- il piano geometrico è l'insieme di tutti i suoi punti, e ogni punto è una coppia ordinata. Perciò, **piano geometrico**= $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$;
- un ente geometrico è un sottinsieme di punti del piano (p.es.: una retta, un cerchio, una circonferenza, un triangolo, etc) descritto da certe proprietà, che talvolta possono essere riassunte in un'equazione. Un punto geometrico P , corrispondente alla coppia ordinata (a, b) , è uno dei punti dell'ente geometrico F descritto dall'equazione $E(x, y) = 0$ precisamente se $E(a, b) = 0$, cioè $P \in F$ se e solo se $E(a, b) = 0$. Quindi gli enti geometrici possono essere identificati con l'insieme delle soluzioni in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dell'equazione $E(x, y) = 0$ (equazione in due incognite).

Ad esempio, l'equazione $y - x - 2 = 0$ ha come insieme delle soluzioni $S = \{(a, a+2) \mid a \in \mathbb{R}\}$, e se disegniamo i punti (le coppie ordinate) di S nel piano cartesiano possiamo constatare che si ottiene l'ente geometrico **retta parallela alla bisettrice del primo e terzo quadrante e passante per il punto di ascissa 0 e ordinata 2**. Oppure, l'equazione $x^2 + y^2 - 1 = 0$ ha come insieme delle soluzioni tutte le coppie di numeri reali (punti del piano) che sono sulla circonferenza di raggio 1 e centro l'origine degli assi. Ciò rende possibile determinare, per esempio, le eventuali intersezioni tra una retta e una circonferenza disegnate nel piano cartesiano semplicemente risolvendo il sistema tra le rispettive equazioni: un punto P del piano, di coordinate (x, y) , è un punto di intersezione tra la retta r di equazione $y - x - 2 = 0$ e la circonferenza c di equazione $x^2 + y^2 - 1 = 0$ precisamente se P è un punto di r (per cui $y - x - 2 = 0$) e anche un punto di c (per cui $x^2 + y^2 - 1 = 0$), cioè esattamente se (x, y) è una soluzione del sistema

$$\begin{cases} y - x - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}.$$

Procedendo per esempio per sostituzione, si trova che il sistema NON ha soluzioni, e quindi la retta r è esterna alla circonferenza c , senza bisogno di fare disegni!

La nozione di *prodotto cartesiano* consente di dare veste formale al generico concetto di relazione:

Definizione 3.31. Assegnati gli insiemi A, B , si dice **relazione tra A e B** (in quest'ordine) ogni sottinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$.

Molte volte, con il termine relazione si intende automaticamente un sottinsieme non vuoto di $A \times B$: ciò per evitare di specificare ogni volta *relazione non vuota*. Tuttavia, per non sbagliare, eviteremo di attribuire un significato così stringente, e con pazienza diremo esplicitamente *relazione non vuota* quando serve.

Osservazione 3.32. Nel linguaggio comune, il termine *relazione* può essere inteso in una varietà di contesti e con significati differenti. Può essere un resoconto (*ho presentato la mia relazione*), un legame profondo tra due persone (*la loro relazione dura da 5 anni*) o poco profondo con molte persone (*sono in buone relazioni con i miei colleghi*), e tanto altro.

In Matematica, però, il concetto di relazione è unicamente quello presentato dalla definizione.

Esempio 3.33. Sia $P := \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ l'insieme degli interi pari. Tra gli insiemi $\mathbb{Z}$ e P c'è un legame naturale: da ogni numero $a \in \mathbb{Z}$ possiamo costruire un elemento di P , semplicemente moltiplicandolo per 2. Questo legame può essere espresso tramite il concetto appena visto, introducendo la relazione

$$\mathcal{R} := \{(k, 2k) \mid k \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Z} \times P.$$

$\mathcal{R}$ è una relazione tra $\mathbb{Z}$ e P . Similmente, $\mathcal{S} := \{(p, p+1) \mid p \in P\}$ è una relazione tra P e $\mathbb{Z}$.

Esempio 3.34. Sia S l'insieme degli studenti di un istituto scolastico, e D l'insieme dei docenti dello stesso istituto. Possiamo esprimere formalmente la relazione che intercorre tra studenti e docenti nella forma di sottinsieme $\mathcal{R} \subseteq S \times D$: costruiamo $\mathcal{R}$ considerando come suoi elementi le sole coppie $(s, d) \in S \times D$ per cui lo studente s ha d come docente. Si noti che, a differenza di prima, ci possono essere molti studenti, anche di classi diverse, che hanno lo stesso docente; così pure, fissato lo studente s , ci possono essere molti docenti d che hanno lo studente s tra i loro studenti.

Potremmo continuare a fornire esempi di relazioni, ma dovrebbe esser chiara una cosa: per quanto generale, il concetto matematico di *relazione* ha un senso molto più preciso di quello del linguaggio comune, dal quale pure nasce. Quando si incontrerà la frase *relazione tra gli insiemi A e B* il pensiero deve automaticamente leggerla per quello che è il suo significato esatto: è stato assegnato un sottinsieme di $A \times B$ (A e B in quest'ordine!).

Per il resto, la notazione che si usa per denotare che una coppia ordinata è membro della relazione fissata è modellata sul linguaggio ordinario:

Definizione 3.35. Sia $\mathcal{R} \subseteq A \times B$, e siano $a \in A$, $b \in B$. Se $(a, b) \in \mathcal{R}$, diciamo che a è in relazione $\mathcal{R}$ con b , e scriviamo $a\mathcal{R}b$. Se $(a, b) \notin \mathcal{R}$, scriveremo invece sinteticamente $a\not\mathcal{R}b$ e diremo che a non è in relazione $\mathcal{R}$ con b .

Esempio 3.36. Tornando all'esempio $\mathcal{R} = \{(k, 2k) \mid k \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Z} \times P$, scriveremo per esempio che $2\mathcal{R}4$ per dire che $(2, 4) \in \mathcal{R}$; invece scriveremo $2\not\mathcal{R}6$ perchè $(2, 6) \notin \mathcal{R}$.

Come per il prodotto cartesiano dal quale nasce, il concetto di relazione è troppo generico; la sua vera forza, come per il prodotto cartesiano, è proprio la sua flessibilità, che lo rende adatto a rappresentare varie situazioni. Imponendo a una relazione condizioni aggiuntive che devono essere soddisfatte si ottengono oggetti matematici più specifici. Essi saranno oggetto del programma di Matematica Discreta, ed esaminati in dettaglio in tale sede.