

Prova Scritta di **Matematica Discreta**
C.L. **ITPS** – Corso A
03 Febbraio 2026

Esercizio 1.

Un lucchetto a combinazione ha 5 cilindri rotanti incolonnati, su ciascuno dei quali sono riportate le cifre da 0 a 9. Quante sono le possibili combinazioni che si possono impostare come chiave segreta? Quante quelle in cui compare almeno una volta la cifra 3?

Esercizio 2.

Per quali $n \in \mathbb{Z}$ il numero $a_n = n^6 + 2n^5 + 4n^2 + 3n$ è divisibile per 30?

Esercizio 3.

Sia $f := x^4 + x^3 + x + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$ e si consideri l'anello quoziente $A := \mathbb{Z}_3[x]/(f)$.

- (1) Dire se A è o meno un campo;
- (2) dire $\alpha := [x]_f \in A$ è invertibile o un divisore di zero in A ;
- (3) a seconda della risposta precedente, esibire l'inverso o un codivisore di zero per α .

Esercizio 4.

Assegnata la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in GL_4(\mathbb{Z}_5),$$

calcolarne determinante, l'inverso e periodo.

Esercizio 5.

Sia assegnata la permutazione

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 2 & 4 & 7 & 1 & 8 & 5 & 3 & 6 & 11 & 10 & 12 & 9 \end{pmatrix} \in S_{12},$$

e sia $\alpha = \sigma^{3423}$.

- (1) Scrivere esplicitamente α come prodotto di cicli disgiunti;
- (2) detto $C := \{\beta \in A_{12} \mid \alpha\beta = \beta\alpha\}$, si verifichi che esso è un sottogruppo di S_{12} , e se ne esibiscano due elementi.