

Prova Scritta di **Matematica Discreta**

C.L. **ITPS** – Track A–L

10 Novembre 2024

Esercizio 1. Assegnati gli insiemi $A := \{3, 5, 7\}$ e $B := \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, quante sono le funzioni $f : A \rightarrow B$ tali che $f(a) > a$ per ogni $a \in A$? Quante tra esse sono iniettive?

Esercizio 2. Risolvere il sistema di congruenze

$$\begin{cases} x \equiv 32^{511} \pmod{15} \\ 3x \equiv 1 \pmod{8} \\ x \equiv 8 \pmod{33} \end{cases}$$

determinandone la massima soluzione negativa.

Esercizio 3.

Assegnata la permutazione

$$\sigma = (1\,3\,4\,7)(2\,4\,3\,7)(1\,4\,7)(2\,4\,8)(1\,8) \in S_{12},$$

sia $\alpha = \sigma^{3425}$.

- (1) Scrivere esplicitamente α come prodotto di cicli disgiunti;
- (2) esibire tutti gli eventuali elementi di $\langle \alpha \rangle$ di periodo 3.

Esercizio 4. Sia $p := x^3 + x^2 - 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$ e sia $A := \mathbb{Z}_3[x]/(p)$. Si dica se l'elemento $[x^2 - 1]_p \in A$ è o meno invertibile in A , calcolandone l'inverso in caso affermativo o determinandone un co-divisore di zero altrimenti.

Esercizio 5. Assegnata la matrice

$$\mathbf{a} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_5),$$

determinare se \mathbf{a} è invertibile e determinare una matrice $\mathbf{x} \in M_3(\mathbb{Z}_5)$ che, multipli-

cata \mathbf{a} **destra** per \mathbf{a} , soddisfi $\mathbf{x}\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.