

Prova Scritta di **Matematica Discreta**  
 C.L. **ITPS** – Track A–L  
 10 Novembre 2024

**Esercizio 1.** Assegnati gli insiemi  $A := \{3, 5, 7\}$  e  $B := \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ , quante sono le funzioni  $f : A \rightarrow B$  tali che  $f(a) > a$  per ogni  $a \in A$ ? Quante tra esse sono iniettive?

**Esercizio 2.** Risolvere il sistema di congruenze

$$\begin{cases} x \equiv 32^{511} \pmod{15} \\ 3x \equiv 1 \pmod{8} \\ x \equiv 8 \pmod{33} \end{cases}$$

determinandone la massima soluzione negativa.

**Esercizio 3.**

Assegnata la permutazione

$$\sigma = (1\ 3\ 4\ 7)(2\ 4\ 3\ 7)(1\ 4\ 7)(2\ 4\ 8)(1\ 8) \in S_{12},$$

sia  $\alpha = \sigma^{3425}$ .

- (1) Scrivere esplicitamente  $\alpha$  come prodotto di cicli disgiunti;
- (2) esibire tutti gli eventuali elementi di  $\langle \alpha \rangle$  di periodo 3.

**Esercizio 4.** Sia  $p := x^3 + x^2 - 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$  e sia  $A := \mathbb{Z}_3[x]/(p)$ . Si dica se l'elemento  $[x^2 - 1]_p \in A$  è o meno invertibile in  $A$ , calcolandone l'inverso in caso affermativo o determinandone un co-divisore di zero altrimenti.

**Esercizio 5.** Assegnata la matrice

$$\mathbf{a} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_5),$$

determinare se  $\mathbf{a}$  è invertibile e determinare una matrice  $\mathbf{x} \in M_3(\mathbb{Z}_5)$  che, moltiplicata  $\mathbf{a}$  a destra per  $\mathbf{a}$ , soddisfi  $\mathbf{x}\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .