

Prova Scritta di **Matematica Discreta**  
C.L. **ITPS** – Corso A  
10 Aprile 2025

**Esercizio 1.**

Sia  $(G, \cdot)$  un gruppo. Dimostrare che se per ogni  $g \in G$  risulta  $g^2 = 1_G$ , allora  $G$  è abeliano.

**Esercizio 2.**

Sia  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la successione definita ricorsivamente tramite  $s_0 = -1$ ,  $s_1 = 3$  e  $s_n = 2s_{n-2} + s_{n-1}$  se  $n \geq 2$ .

- (1) calcolare i termini  $s_3$  ed  $s_4$ ;
- (2) verificare che la forma chiusa per  $s_n$  è data da

$$s_n = \frac{5(-1)^{n+1} + 2^{n+1}}{3}.$$

**Esercizio 3.**

Tra i numeri di tre cifre quanti sono quelli minori di 500 e composti esclusivamente da cifre pari e tutte diverse da loro?

**Esercizio 4.**

Assegnate le funzioni

$$\begin{array}{rcl} f : & \mathbb{Z}_{12} & \rightarrow \mathbb{Z}_{18} \\ & [x]_{12} & \rightarrow [3x]_{18} \end{array} \quad \begin{array}{rcl} g : & \mathbb{Z}_{12} & \rightarrow \mathbb{Z}_{18} \\ & [x]_{12} & \rightarrow [9x]_{18} \end{array},$$

- (1) verificare che sia  $f$  che  $g$  sono ben definite;
- (2) determinare se e quale tra  $f$  e  $g$  è un omomorfismo di anelli, e determinarne il nucleo.

**Esercizio 5.**

Determinare tutte le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 3x \equiv x + 6 \pmod{24} \\ 6x - 3 \equiv 87 \pmod{108} \end{cases}$$

ed esibire esplicitamente la minima soluzione  $> 2000$ .