

Prova Scritta di **Matematica Discreta**
C.L. **ITPS** – Corso A
10 Aprile 2025

Esercizio 1.

Sia (G, \cdot) un gruppo. Dimostrare che se per ogni $g \in G$ risulta $g^2 = 1_G$, allora G è abeliano.

Esercizio 2.

Sia $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la successione definita ricorsivamente tramite $s_0 = -1$, $s_1 = 3$ e $s_n = 2s_{n-2} + s_{n-1}$ se $n \geq 2$.

- (1) calcolare i termini s_3 ed s_4 ;
- (2) verificare che la forma chiusa per s_n è data da

$$s_n = \frac{5(-1)^{n+1} + 2^{n+1}}{3}.$$

Esercizio 3.

Tra i numeri di tre cifre quanti sono quelli minori di 500 e composti esclusivamente da cifre pari e tutte diverse da loro?

Esercizio 4.

Assegnate le funzioni

$$\begin{array}{ccc} f: \mathbb{Z}_{12} & \rightarrow & \mathbb{Z}_{18} \\ [x]_{12} & \rightarrow & [3x]_{18} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} g: \mathbb{Z}_{12} & \rightarrow & \mathbb{Z}_{18} \\ [x]_{12} & \rightarrow & [9x]_{18} \end{array},$$

- (1) verificare che sia f che g sono ben definite;
- (2) determinare se e quale tra f e g è un omomorfismo di anelli, e determinarne il nucleo.

Esercizio 5.

Determinare tutte le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 3x \equiv x + 6 & (\text{mod } 24) \\ 6x - 3 \equiv 87 & (\text{mod } 108) \end{cases}$$

ed esibire esplicitamente la minima soluzione > 2000 .