

Prova Scritta di **Matematica Discreta**  
 C.L. **ITPS** – Corso A  
 31 Gennaio 2024

**Esercizio 1.**

Quante sono le funzioni  $f : \mathbb{Z}_8 \rightarrow \mathbb{Z}_9$  tali che  $f([2]_8) = [7]_9$  e  $f([3]_8) = [6]_9$ ?  
 Quante quelle tali che  $f^{-1}(\{[6]_9, [7]_9\}) = \{[2]_8, [3]_8\}$ ?

**Esercizio 2.**

Per quali  $n \in \mathbb{Z}$  il numero  $a_n = n^6 + 2n^5 + 4n^2 + 3n$  è divisibile per 30?

**Esercizio 3.**

Sia  $f := x^4 + x^3 + x + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$  e si consideri l'anello quoziante  $A := \mathbb{Z}_3[x]/(f)$ .

- (1) Dire se  $A$  è o meno un campo;
- (2) dire  $\alpha := [x]_f \in A$  è invertibile o un divisore di zero in  $A$ ;
- (3) a seconda della risposta precedente, esibire l'inverso o un codivisore di zero per  $\alpha$ .

**Esercizio 4.**

Assegnata la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in GL_4(\mathbb{Z}_5),$$

calcolarne il determinante, l'inversa e il periodo moltiplicativo.

**Esercizio 5.**

Sia assegnata la permutazione

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 2 & 4 & 7 & 1 & 8 & 5 & 3 & 6 & 11 & 10 & 12 & 9 \end{pmatrix} \in S_{12},$$

e sia  $\alpha = \sigma^{3423}$ .

- (1) Scrivere esplicitamente  $\alpha$  come prodotto di cicli disgiunti;
- (2) detto  $C := \{\beta \in A_{12} \mid \alpha\beta = \beta\alpha\}$ , si verifichi che esso è un sottogruppo di  $S_{12}$ , e se ne esibiscano due elementi.