

Esponenziali e logaritmi:

- x^c
 - c esponente fisso
 - x variabile
 - x^c potenza di base x e esponente c .
- a^x
 - a è una base fissata
 - x è una variabile
 - a^x esponenziale in base a di x .

Fissato $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e fissato $y \in \mathbb{R}$, vogliamo risolvere l'equazione $a^x = y$.

OSS Se $y \leq 0$, l'equazione non ha soluzioni (reali). (Stiamo fissando $a > 0$).

OSS 2: Se $a = 1$, l'equazione ha soluzione se e solo se $y = 1$ e in quel caso è risolto da ogni $x \in \mathbb{R}$.

TEOREMA

Sia $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$. Sia $y \in \mathbb{R}$, $y > 0$. Allora $\exists!$ $x \in \mathbb{R}$ t.c. $a^x = y$.

Def: Sotto le ipotesi del teorema, l'unico x tale che $a^x = y$ è detto **LOGARITMO IN BASE a DI y** e si indica con $\log_a y$.

($\log_a y$ è l'unico esponente da dare ad a per ottenere y).

ESEMPI

$$\log_2 16 = 4$$

$$\log_{10} 1000 = \log_{10} 10^3 = 3.$$

$$\log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2}$$

$$\log_9 27 = \log_9 3^3 = \log_9 (9^{\frac{1}{2}})^3 = \log_9 9^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$$

Notazioni particolari:

- Se $a = e$, $\log_e$ è detto **LOGARITMO NATURALE** e si indica con **ln** (o **log** su alcuni testi).
- Se $a = 10$, $\log_{10}$ si indica anche con **log**

Due esempi nelle scienze della Terra:

- Magnitudo dei terremoti:

$$M = \log_{10} A - \log_{10} A_0 = \log_{10} \frac{A}{A_0}.$$

A_0 ampiezza di riferimento
 A ampiezza misurata.

- pH di una soluzione.

$$\text{pH} = -\log_{10} (H^+) \quad \text{concentrazione di ioni } H^+.$$

PROPRIETÀ DEI LOGARITMI.

Sia $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$.

1) $\log_a x$ è definito solo se $x > 0$.

$$2) \forall x \in \mathbb{R} : \log_a a^x = x$$

$$3) \forall x \in \mathbb{R}, x > 0 : a^{\log_a x} = x.$$

$$4) \forall x, y \in \mathbb{R}, x, y > 0 : \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y.$$

$$5) \forall x, y \in \mathbb{R}, x, y > 0 :$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y.$$

$$6) \forall x \in \mathbb{R}, x > 0 : \log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$$

$$7) \log_a 1 = 0 \quad \text{e} \quad \log_a a = 1$$

$$8) \forall b, x \in \mathbb{R}, b > 0 : \log_a b^x = x \log_a b$$

$$9) \forall x \in \mathbb{R}, x > 0, x \neq 1 \quad \left(a^b = x \Leftrightarrow a = x^{\frac{1}{b}} \right)$$

$$\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$$

$$10) \forall b \in \mathbb{R}, b > 0, b \neq 1 \cdot \text{e} \forall x \in \mathbb{R}, x > 0 :$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} = (\log_b x)(\log_a b).$$

ESEMPI

$$1) \log_3 (81^{25}) = 25 \log_3 81 = 25 \cdot 4 = 100$$

oppure:

$$\begin{aligned} \log_3 (81^{25}) &= \frac{\log_{81} (81^{25})}{\log_{81} 3} = \frac{25}{\log_{81} 3} \\ &= 25 \cdot \log_3 81 = 25 \cdot 4 = 100. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \log_5 (1000) &= \log_5 (10^3) = \log_5 (5^3 \cdot 2^3) \\ &= \log_5 5^3 + \log_5 2^3 \\ &= 3 + 3 \log_5 2 \end{aligned}$$

Equazioni / disequazioni elementari con
esponenziali e logaritmi:

ESEMPI

$$1) 32^x = 4$$

$$\log_{32} 32^x = \log_{32} 4$$

$$x = \log_{32} 4$$

$$x = \frac{\log_2 4}{\log_2 32} = \frac{2}{5}$$

$$2) \quad 2 \cdot 3^x = 1$$

$$3^x = \frac{1}{2}$$

$$x = \log_3 \frac{1}{2}$$

$$x = -\log_3 2$$

Relazione fondamentale

$$a^x = y > 0 \Leftrightarrow x = \log_a y$$

$$3) \quad \underbrace{5^x}_{>0} = \underbrace{-3}_{<0} \quad \text{impossibile.}$$

$$4) \quad e^{2x} = 2^{x-1}$$

$$\ln e^{2x} = \ln 2^{x-1}$$

$$2x = (x-1) \ln 2.$$

$$2x = x \ln 2 - \ln 2$$

$$2x - x \ln 2 = -\ln 2$$

$$x(2 - \ln 2) = -\ln 2$$

$$x = \frac{-\ln 2}{2 - \ln 2}.$$

oss

$$a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow \log_c a^{f(x)} = \log_c b^{g(x)}$$

$$\Leftrightarrow f(x) \log_c a = g(x) \log_c b$$

$$5) \quad 2^{2x} = 6 \cdot 2^x - 8$$

$$2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$$

$$(2^x)^2 - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$$

Sostituzione: $y = 2^x$

$$y^2 - 6y + 8 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 9 - 8 = 1, \quad y_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{1} = \begin{matrix} 4 \\ -2 \end{matrix}$$

$$y = 4 \quad \vee \quad y = 2$$

$$2^x = 4 \quad \vee \quad 2^x = 2$$

$$x = \log_2 4 \quad \vee \quad x = \log_2 2$$

$$x = 2 \quad \vee \quad x = 1$$

$$6) \quad 9^x + 2 \cdot 3^x - 3 = 0$$

$$(3^2)^x + 2 \cdot 3^x - 3 = 0$$

$$3^{2x} + 2 \cdot 3^x - 3 = 0$$

Sostituzione $y = 3^x$

$$y^2 + 2y - 3 = 0$$

$$y_{1,2} = -1 \pm \sqrt{4} = \begin{matrix} 1 \\ -3 \end{matrix}$$

$$y = 1 \quad \vee \quad y = -3$$

$$3^x = 1 \quad \vee \quad 3^x = -3 \quad (\text{impossibile})$$

$$3^x = 1$$

$$x = \log_3 1 = 0.$$

$$7) \log_2 x = -3 \quad (\text{c.e. } x > 0).$$

$$2^{\log_2 x} = 2^{-3}$$

$$x = 2^{-3}$$

$$x = \frac{1}{8}$$

$$8) 3 \log_3^2 x - \log_3 x - 2 = 0$$

$$y = \log_3 x \quad \text{c.e. } x > 0.$$

$$3y^2 - y - 2 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{6} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$y = 1 \quad \vee \quad y = -\frac{2}{3}$$

$$\log_3 x = 1 \quad \vee \quad \log_3 x = -\frac{2}{3}$$

$$3^{\log_3 x} = 3^1$$

$$x = 3$$

$$3^{\log_3 x} = 3^{-\frac{2}{3}}$$

$$x = 3^{-\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{1}{3^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{9}}$$

Nota

$$\log_3^2 x = (\log_3 x)^2$$

$$\log_3 x^2 = \log_3 (x^2)$$

Metodi per le disequazioni:

Per le equazioni: $a^x = y$ con $y > 0$

$$\Leftrightarrow x = \log_a y$$

Per le disuguaglianze

Sia $y > 0$ e sia $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$, allora:

$$\begin{array}{ll} a^x \geq y & \Leftrightarrow x \geq \log_a y \\ a^x \leq y & \Leftrightarrow x \leq \log_a y \\ a^x > y & \Leftrightarrow x > \log_a y \\ a^x < y & \Leftrightarrow x < \log_a y \end{array}$$

Sia $y > 0$ e sia $0 < a < 1$, allora:

$$\begin{array}{ll} a^x \geq y & \Leftrightarrow x \leq \log_a y \\ a^x \leq y & \Leftrightarrow x \geq \log_a y \\ a^x > y & \Leftrightarrow x < \log_a y \\ a^x < y & \Leftrightarrow x > \log_a y \end{array}$$

Nota: Attenzione alle disuguaglianze banali:

- $2^x \leq -3$ impossibile
- $2^x \geq -17$ vero $\forall x \in \mathbb{R}$.
- $3^x > 0$ vero $\forall x \in \mathbb{R}$.

ESempi

$$\bullet 3^{x+1} > 2$$

$$x+1 > \log_3 2$$

$$x > \log_3 2 - 1$$

$$\cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x < 8$$

$$x > \log_{\frac{1}{2}} 8$$

siccome $0 < \frac{1}{2} < 1$ passando
ai logaritmi invertiamo
il verso della disuguaglianza

Ma:

$$\log_{\frac{1}{2}} 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 \frac{1}{2}} = \frac{3}{-\log_2 2} = \frac{3}{-1} = -3$$

quindi:

$$x > -3.$$

Alternativa

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x < 8$$

$$\log_2 \left(\left(\frac{1}{2}\right)^x\right) < \log_2 8$$

$$x \log_2 \frac{1}{2} < 3$$

$$-x < 3$$

$$x > -3$$

$$3) \ln x < 7$$

$$e^{\ln x} < e^7$$

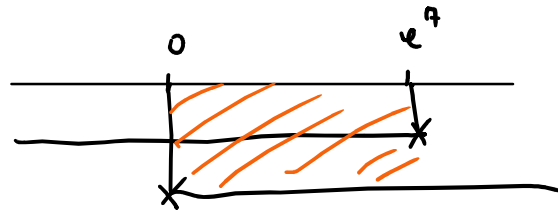
$$x < e^7$$

$$\text{c.e. } x > 0.$$

$$e = 2,71\dots$$

$$\begin{cases} x < e^7 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$0 < x < e^7$$



4) $\log_{\frac{1}{3}} x < 2$

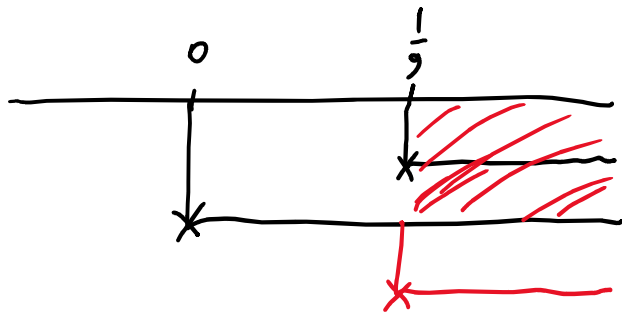
c.e. $x > 0$.

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} x} > \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$x > \frac{1}{9}$$

$$\begin{cases} x > \frac{1}{9} \\ x > 0 \end{cases}$$

$$x > \frac{1}{9}$$



5) $e^{2x-1} \leq e^3$

$$2x - 1 \leq 3$$

$$2x \leq 4$$

$$x \leq 2$$

6) $\left(\frac{1}{4}\right)^{2x-1} < \frac{1}{16}$

$$2x - 1 > \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{16}$$

$$2x - 1 > 2$$

$$2x > 3$$

$$x > \frac{3}{2}$$

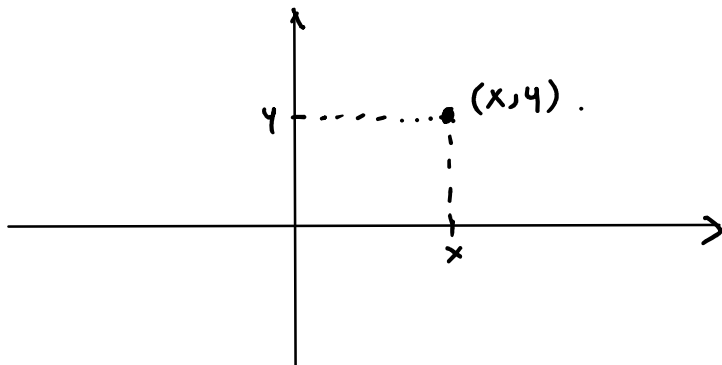
$$4) \quad 2^{x^2-1} + 3 > 0$$

$$2^{x^2-1} > -3 \quad \text{vero } \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$2^{x^2-1} + 3 \leq 0$$

$$\underbrace{2^{x^2-1}}_{>0} \leq -3 \quad (\text{impossibile}).$$

$$\mathbb{R}^2 = \{ (x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \}$$

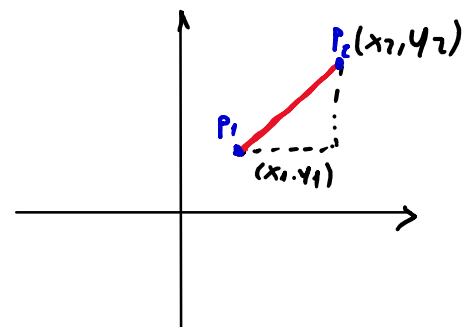


Distanza tra due punti:

Siano $P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$

la **DISTANZA** tra i due punti è

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$



Equazione della circonferenza.

Sia $C = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, e sia $r > 0$. La CIRCONFERENZA di centro C e raggio r , l'insieme dei punti $P = (x, y)$ tali che $d(P, C) = r$

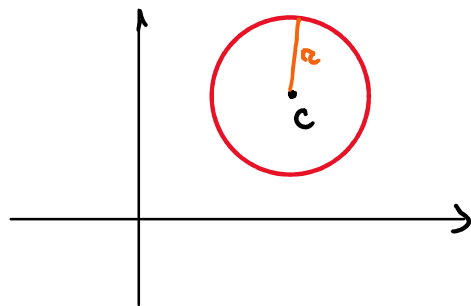
$$P = (x, y), \quad C = (x_0, y_0)$$

$$d(P, C) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

quindi

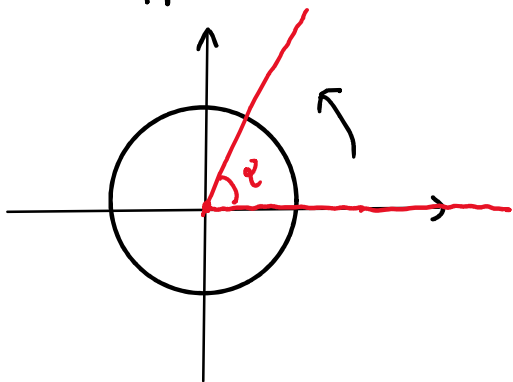
$$d(P, C) = r \quad \Leftrightarrow \quad d(P, C)^2 = r^2$$

$$\Leftrightarrow \quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$



Def: Chiamiamo CIRCONFERENZA GONIOMETRICA la circonferenza di centro $(0, 0)$ e raggio $r = 1$. (equazione $x^2 + y^2 = 1$).

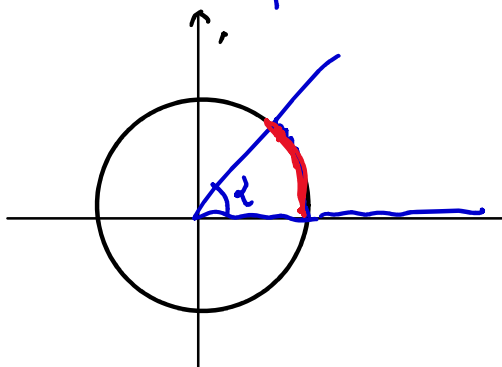
La circonferenza goniometrica permette di rappresentare gli angoli.



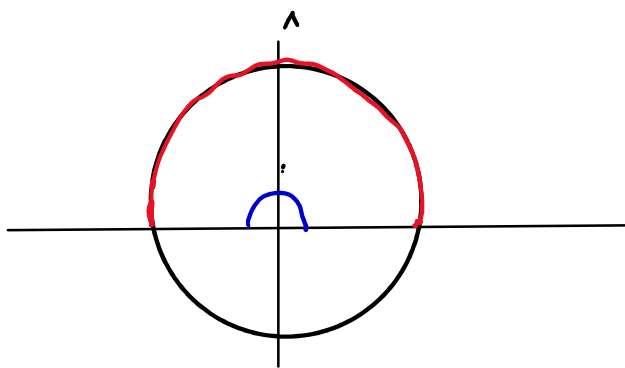
Per convenzione gli angoli positivi si ottengono ruotando in senso antiorario e quelli negativi in

sense orario,

oss Ad ogni angolo corrisponde un arco sulla circonferenza goniometrica



Def: La lunghezza dell'arco che corrisponde ad un angolo (a meno del segno) è detta MISURA IN RADIANI DELL'ANGOLO



lunghezza della circonferenza
e 2π .

$$360^\circ \longleftrightarrow 2\pi$$

$$180^\circ \longleftrightarrow \pi$$

$$90^\circ \longleftrightarrow \frac{\pi}{2}$$

$$45^\circ \longleftrightarrow \frac{\pi}{4}$$

$$30^\circ \longleftrightarrow \frac{\pi}{6}$$

$$60^\circ \longleftrightarrow \frac{\pi}{3}$$