

MATEMATICA LEZIONE 7

lunedì 12 ottobre 2026 09:07

$$1 - 27x^3 = (1 - 3x)(1 + 3x + 9x^2)$$

PRODOTTI NOTEVOLI

$\forall a, b \in \mathbb{R}$:

- $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
- $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
- $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

OSS

$$a^2 \pm ab + b^2 \geq |ab| \geq 0 \quad \text{e}$$

$$a^2 \pm ab + b^2 = 0 \iff a = 0 \wedge b = 0$$

$$\begin{aligned} 1 - 27x^3 &= 1 - (3x)^3 \\ &= (1 - 3x)(1 + 3x + 9x^2) \end{aligned}$$

Abbiamo detto che, dato $y \in \mathbb{R}$, si può considerare l'equazione $x^2 = y$.

- Se $y < 0$, l'eq. non ha soluzioni.
- Se $y = 0$, $x = 0$ è l'unica soluzione dell'eq.
- Se $y > 0$, $x = \pm \sqrt{y}$ sono le uniche sol.

Nota: Si può dire che se $y \geq 0$, allora $x = \sqrt{y}$ è l'unica soluzione ≥ 0 .

Consideriamo $x^3 = y$

Si può dimostrare che, indipendentemente da y ,
l'eq. ha sempre un'unica soluzione ($x = \sqrt[3]{y}$)

TEOREMA Sia $y \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Consideriamo l'eq. $x^n = y$.

- 1) Se n è dispari $\exists!$ $x \in \mathbb{R}$ soluzione dell'equazione.
- 2) Se n è pari e $y \geq 0$, allora $\exists!$ $x \in \mathbb{R}, x \geq 0$, soluzione dell'eq.
- 3) Se n è pari e $y < 0$, l'eq. non ha soluzioni (reali).

Def. Nei casi 1) e 2), l'unico $x \in \mathbb{R}$
con lo stesso segno di y t.c.
 $x^n = y$ è detto **RADICE n -ESIMA** di y
e si indica $\sqrt[n]{y}$

$$\sqrt{\quad} = \sqrt{\quad}$$

RADICE QUADRATA

$$\sqrt[3]{\quad}$$

RADICE CUBICA

$$\sqrt[4]{\quad}$$

RADICE QUARTA

$$\vdots$$

$$\sqrt[n]{\quad}$$

RADICE n -ESIMA.

ESEMPLI

$$\sqrt[4]{81} = 3$$

$$(3^4 = 81)$$

$$\sqrt[5]{-32} = -2$$

$$\sqrt[3]{1000} = 10$$

~~$$\sqrt[4]{-81}$$~~

($-81 < 0$ quindi non ne possiamo calcolare radici di indice pari)

$$\sqrt[4]{(-2)^4} = \sqrt[4]{16} = 2$$

$$\sqrt[3]{(-2)^3} = -2$$

Ricordare

- Se n è pari, $\sqrt[n]{y}$ è definita solo se $y \geq 0$. Inoltre $\sqrt[n]{y}$ è sempre ≥ 0 .
- Se n è dispari, $\sqrt[n]{y}$ è definita $\forall y \in \mathbb{R}$ e ha sempre lo stesso segno di y .
- $\sqrt[n]{y} = 0 \iff y = 0$.
- $\sqrt[n]{y} > 0 \iff y > 0$.
- Se n è dispari, $\forall x, y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{lll} x^n = y & \iff & x = \sqrt[n]{y} \\ x^n \leq y & \iff & x \leq \sqrt[n]{y} \\ x^n \geq y & \iff & x \geq \sqrt[n]{y} \\ x^n > y & \iff & x > \sqrt[n]{y} \\ x^n < y & \iff & x < \sqrt[n]{y} \end{array}$$

- Se n è pari, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ con $y \geq 0$:

$$x^n = y \iff x = \pm \sqrt[n]{y}.$$

• Se n è pari, $\forall x, y \in \mathbb{R}, y > 0$:

$$\begin{aligned} x^n \geq y &\iff x \leq -\sqrt[n]{y} \vee x \geq \sqrt[n]{y} \\ x^n > y &\iff x < -\sqrt[n]{y} \vee x > \sqrt[n]{y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^n \leq y &\iff -\sqrt[n]{y} \leq x \leq \sqrt[n]{y} \\ x^n < y &\iff -\sqrt[n]{y} < x < \sqrt[n]{y} \end{aligned}$$

Potenze con esponente reale

Sia $x \in \mathbb{R}$, abbiamo già definito

$$x^m := x \cdot x \cdot \dots \cdot x \text{ (} m \text{ volte)} \text{ se } m \in \mathbb{N} \text{ e } m \geq 1.$$

Se $x \neq 0$, $x^0 := 1$.

Def (Potenze con esponente intero o razionale)

1) Sia $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$ e $m \in \mathbb{N}, m \geq 1$, definiamo

$$x^{-m} := \frac{1}{x^m} = \frac{1}{x \cdot x \cdot \dots \cdot x} \text{ (} m \text{ volte)}.$$

2) Sia $x \in \mathbb{R}, x \geq 0$ e siano $m, n \in \mathbb{N}$ con $m \geq 1, n \geq 1$. Definiamo:

$$x^{\frac{m}{n}} := \sqrt[n]{x^m}$$

Se $x > 0$, definiamo $x^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{x^{\frac{m}{n}}}$

Cosa significa 2^π ?

Def: Sia $x \in \mathbb{R}, x \geq 1$ e sia $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Definiamo

$$x^\alpha := \sup \{ x^q \mid q \in \mathbb{Q}, q < \alpha \}$$

Se $0 < x < 1$ e $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, allora:

$$x^a := \inf \{ x^q \mid q \in \mathbb{Q}, q < a \}.$$

Se $x = 0$ e $a \in \mathbb{R}, a > 0$: $0^a = 0$.

ESEMPI DI POTENZE CON ESPONENTE RAZIONALE

$$\bullet 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{2^1} = \sqrt{2}$$

$$\bullet 5^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{5^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5}}$$

$$\bullet 2^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{16}$$

$$\bullet 10^{-\frac{5}{3}} = \frac{1}{10^{\frac{5}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{10^5}} = \frac{1}{\sqrt[3]{100\,000}}$$

Nota: Se $q \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, abbiamo definito x^q solo quando $x \geq 0$ ($x > 0$ se $q < 0$).

Non abbiamo definito x^q quando $x < 0$. Perché?

$$\sqrt[3]{-1} = -1 \quad \text{ma} \quad (-1)^{\frac{1}{2}} \text{ non \u00e8 definito.}$$

Infatti:

$$(-1)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-1} = -1$$

$$(-1)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-1)^2} = \sqrt[6]{1} = 1$$

(risultati incompatibili!)

PROPRIETÀ DELLE POTENZE.

1) $\forall x \in \mathbb{R} : x^1 = x$ e, se $x \neq 0$, $x^0 = 1$.

2) $\forall x \in \mathbb{R}, x > 0$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$x^{\alpha + \beta} = x^{\alpha} \cdot x^{\beta}$$

$$x^{\alpha - \beta} = \frac{x^{\alpha}}{x^{\beta}}$$

$$x^{\alpha \cdot \beta} = (x^{\alpha})^{\beta}$$

$$x^{-\alpha} = \frac{1}{x^{\alpha}}$$

3) Siano $x, y \in \mathbb{R}, x, y > 0$ e sia $\alpha \in \mathbb{R}$,
allora:

$$(x \cdot y)^{\alpha} = x^{\alpha} \cdot y^{\alpha}$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{\alpha} = \frac{x^{\alpha}}{y^{\alpha}}$$

4) $\forall x \in \mathbb{R}, x > 0, x \neq 1, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$x^{\alpha} = x^{\beta} \iff \alpha = \beta.$$

5) $\forall x \in \mathbb{R}, x > 1$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$x^{\alpha} \geq x^{\beta} \iff \alpha \geq \beta.$$

$$x^{\alpha} \leq x^{\beta} \iff \alpha \leq \beta$$

$$x^{\alpha} < x^{\beta} \iff \alpha < \beta$$

$$x^{\alpha} > x^{\beta} \iff \alpha > \beta$$

6) $\forall x \in \mathbb{R}, 0 < x < 1$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$x^{\alpha} \geq x^{\beta} \iff \alpha \leq \beta$$

$$x^{\alpha} \leq x^{\beta} \iff \alpha \geq \beta$$

$$x^{\alpha} > x^{\beta} \iff \alpha < \beta$$

$$x^{\alpha} < x^{\beta} \iff \alpha > \beta$$

ESEMPIO

$$\bullet \frac{(s^2 \cdot s^3)^8}{s^{15}} = \frac{(s^5)^8}{s^{15}} = \frac{s^{40}}{s^{15}} = s^{40-15} = s^{25}$$

$$\begin{aligned}\bullet 2^8 \cdot 6^{-4} \cdot 3^2 &= 2^8 \cdot (2 \cdot 3)^{-4} \cdot 3^2 \\ &= 2^8 \cdot 2^{-4} \cdot 3^{-4} \cdot 3^2 \\ &= 2^4 \cdot 3^{-2} = \frac{2^4}{3^2} = \frac{16}{9}\end{aligned}$$

$$\bullet \sqrt[3]{2^5} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2^2} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{2^2} = 2 \cdot \sqrt[3]{4}$$

$$\begin{aligned}\bullet 2^4 \cdot 2^{-\frac{1}{3}} &= 2^{4-\frac{1}{3}} = 2^{\frac{11}{3}} = \sqrt[3]{2^{11}} \\ &= \sqrt[3]{2^9 \cdot 2^2} = \sqrt[3]{2^9} \cdot \sqrt[3]{2^2} \\ &= (2^3)^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{2^2} \\ &= 2^3 \cdot \sqrt[3]{2^2} = 8 \sqrt[3]{4}\end{aligned}$$

oss Se $x, y \in \mathbb{R}, x, y \geq 0$ e $m \in \mathbb{N}, m \geq 2$.

$$\sqrt[m]{x \cdot y} = \sqrt[m]{x} \cdot \sqrt[m]{y} \quad \text{e, se } y \neq 0, \quad \sqrt[m]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[m]{x}}{\sqrt[m]{y}}$$

Attenzione Im generale

$$\sqrt[m]{x+y} \neq \sqrt[m]{x} + \sqrt[m]{y} \quad \text{e}$$

$$(x+y)^m \neq x^m + y^m.$$

$$(x+y)^2 = x^2 + \boxed{2xy} + y^2 \neq x^2 + y^2$$

Potenze di un binomio

TRIANGOLO DI TARTAGLIA

$$(x+y)^0 = 1$$

$$(x+y)^1 = x+y$$

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

Quadrato di una somma

$$\bullet (x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$$

$$\bullet (x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz.$$

$$\bullet (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2$$

$$= x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$$

$$+ 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + \dots + 2x_1x_n$$

$$+ 2x_2x_3 + \dots + 2x_2x_n$$

$\vdots$

$$+ 2x_{n-1}x_n$$

Risoluzione equazioni e disequazioni con radici

Tipo più semplice: $\sqrt[n]{a(x)} = b(x).$

Metodo Se n è dispari, allora:

$$\sqrt[n]{a(x)} = b(x) \Leftrightarrow a(x) = b(x)^n.$$

ESEMPIO

$$\sqrt[3]{2x^2 - x} = x \quad \text{alvo alla terza:}$$

$$2x^2 - x = x^3$$

$$x^3 - 2x^2 + x = 0$$

$$x(x^2 - 2x + 1) = 0$$

$$x(x-1)^2 = 0$$

$$x = 0 \vee x = 1.$$

In modo simile si procede per le disequazioni:

Per le disequazioni: Se n è dispari:

$$\sqrt[n]{a(x)} \geq b(x) \Leftrightarrow a(x) \geq b(x)^n.$$

$$\sqrt[n]{a(x)} \leq b(x) \Leftrightarrow a(x) \leq b(x)^n$$

$$\sqrt[n]{a(x)} > b(x) \Leftrightarrow a(x) > b(x)^n$$

$$\sqrt[n]{a(x)} < b(x) \Leftrightarrow a(x) < b(x)^n$$

Gli stessi metodi non funzionano se n è pari:

$$\underbrace{\sqrt{x-3}}_{\geq 0} = \underbrace{-1}_{< 0} \quad \text{non ha soluzioni.}$$

Pero, se alvo al quadrato:

$$x-3 = (-1)^2 \Leftrightarrow x-3 = 1 \Leftrightarrow x = 4.$$

Quindi non sempre si può elevare al quadrato (o ad una potenza pari). Bisogna prima controllare i segni).

Domanda: Quando si può elevare al quadrato (o alla n , con n pari)?

Sicuramente se entrambi i membri dell'eq. o della disequazione sono ≥ 0 .

Metodo per le equazioni (n pari): n pari:

$$\sqrt[n]{a(x)} = b(x) \iff \begin{cases} a(x) \geq 0 & (\text{c.e.}) \\ b(x) \geq 0 & (\text{c. di compatibilità}) \\ a(x) = b(x)^n \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} b(x) \geq 0 \\ a(x) = b(x)^n \end{cases}$$

ESEMPIO

$$\sqrt{2x^2 - 3} = x$$

$$\begin{cases} 2x^2 - 3 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ 2x^2 - 3 = x^2 \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq 0 \\ 2x^2 - 3 = x^2 \end{cases}$$

$$\curvearrowright x^2 = 3 \iff x = \pm \sqrt{3}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x = \pm \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{3}.$$

E per le disequazioni ?

$$\sqrt{x-3} \leq -1 \quad \text{impossibile.}$$

$$\sqrt{x-3} \geq -1 \quad \text{sempre vero purché } \sqrt{x-3} \text{ sia ben definito cioè per } x \geq 3.$$

Metodo per le disequazioni (n pari):

- per le disequazioni con $\leq$ o $<$:

$$\sqrt[n]{a(x)} \leq b(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a(x) \geq 0 \\ b(x) \geq 0 \\ a(x) \leq b(x)^n \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{a(x)} < b(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a(x) \geq 0 \\ b(x) \geq 0 \\ a(x) < b(x)^n \end{cases}$$

- Per $\geq$ o $>$:

$$\sqrt[n]{a(x)} \geq b(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a(x) \geq 0 \\ b(x) \geq 0 \\ a(x) \geq b(x)^n \end{cases} \vee \begin{cases} a(x) \geq 0 \\ b(x) < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b(x) \geq 0 \\ a(x) \geq b(x)^n \end{cases} \vee \begin{cases} a(x) \geq 0 \\ b(x) < 0. \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{a(x)} > b(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a(x) \geq 0 \\ b(x) \geq 0 \\ a(x) > b(x)^n \end{cases} \vee \begin{cases} a(x) \geq 0 \\ b(x) < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b(x) \geq 0 \\ a(x) > b(x)^n \end{cases} \vee \begin{cases} a(x) \geq 0 \\ b(x) < 0 \end{cases}$$

ESEMPIO 1

Risolviamo: $\sqrt{2-x^2} \leq 2x-1$.

$$\begin{cases} 2-x^2 \geq 0 \\ 2x-1 \geq 0 \\ 2-x^2 \leq (2x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \\ x \geq \frac{1}{2} \\ 2-x^2 \leq (2x-1)^2 \end{cases}$$

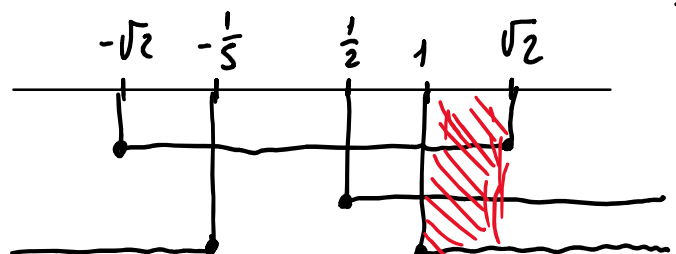
$$2-x^2 \leq 4x^2-4x+1$$

$$0 \leq 5x^2-4x-1$$

$$5x^2-4x-1 \geq 0 \quad , \quad \frac{\Delta}{4} = 4+5=9$$

$$x \leq -\frac{1}{5} \quad \vee \quad x \geq 1 \quad \quad x_{1,2} = \frac{2 \pm 3}{5} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \\ x \geq \frac{1}{2} \\ x \leq -\frac{1}{5} \vee x \geq 1 \end{cases}$$



$$1 \leq x \leq \sqrt{2}$$

Soluzioni: $1 \leq x \leq \sqrt{2}$.

ESEMPIO 2.

Risoliamo $\sqrt{2-x^2} \geq 2x-1$

$$\begin{cases} 2-x^2 \geq 0 \\ 2x-1 \geq 0 \\ 2-x^2 \geq (2x-1)^2 \end{cases} \vee \begin{cases} 2-x^2 \geq 0 \\ 2x-1 < 0. \end{cases}$$

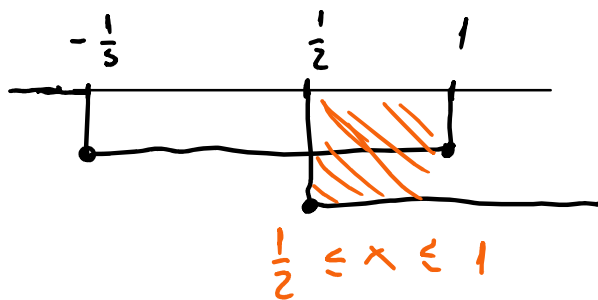
$$\textcircled{1} \begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ 2-x^2 \geq (2x-1)^2 \end{cases} \vee \begin{cases} 2-x^2 \geq 0 \\ 2x-1 < 0 \end{cases} \textcircled{2}$$

$$\begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 2-x^2 \geq 4x^2-4x+1 \end{cases}$$

$$5x^2-4x-1 \leq 0 \quad x_{1,2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$-\frac{1}{5} \leq x \leq 1$$

$$\begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{5} \leq x \leq 1 \end{cases}$$



Soluzioni di $\textcircled{1}$ $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$.

Sistema $\textcircled{2}$:

$$\begin{cases} 2-x^2 \geq 0 \\ 2x-1 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \\ x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Soluzioni di ② : $-\sqrt{2} \leq x < \frac{1}{2}$

Conclusione : $-\sqrt{2} \leq x < \frac{1}{2} \quad \vee \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1.$

cioè $-\sqrt{2} \leq x \leq 1$