

ESERCIZIO DI ESAME

Risolvere:

$$\frac{|3x - 2| - 1}{x^2 - 3} \leq 0.$$

Segno del Num:

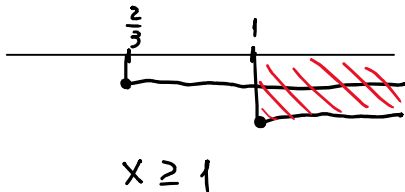
$$|3x - 2| - 1 \geq 0$$

$$\begin{cases} 3x - 2 \geq 0 \\ 3x - 2 - 1 \geq 0 \end{cases} \quad \vee$$

$$\begin{cases} 3x - 2 < 0 \\ -3x + 2 - 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq \frac{2}{3} \\ 3x - 3 \geq 0 \end{cases}$$

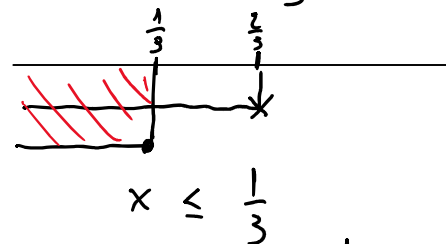
$$\begin{cases} x \geq \frac{2}{3} \\ x \geq 1 \end{cases}$$



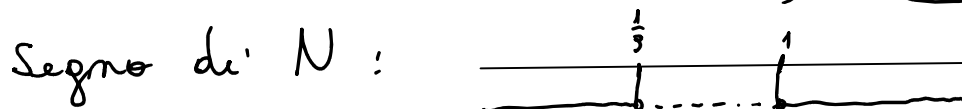
$$\begin{cases} x < \frac{2}{3} \\ -3x + 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < \frac{2}{3} \\ -3x \geq -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < \frac{2}{3} \\ x \leq \frac{1}{3} \end{cases}$$

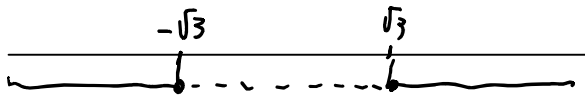


$$N \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1 \quad \vee \quad x \leq \frac{1}{3}$$

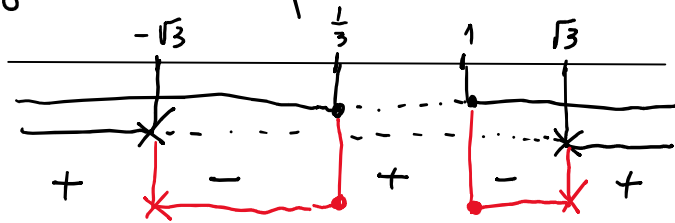


• Segno del denominatore:

$$x^2 - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \sqrt{3} \quad \vee \quad x \leq -\sqrt{3}$$



• Segno della frazione:



≤ 0

Soluzione: $-\sqrt{3} < x \leq \frac{1}{3}$ $\vee$ $1 \leq x < \sqrt{3}$

oss per studiare il segno di N , avremmo potuto usare la proprietà $|a| \geq b$
 $\Leftrightarrow a \geq b \quad \vee \quad a \leq -b$

$$|3x - 2| - 1 \geq 0 \Leftrightarrow |3x - 2| \geq 1.$$

$$\Leftrightarrow 3x - 2 \geq 1 \quad \vee \quad 3x - 2 \leq -1$$

$$\Leftrightarrow 3x \geq 3 \quad \vee \quad 3x \leq 1$$

$$\Leftrightarrow x \geq 1 \quad \vee \quad x \leq \frac{1}{3}$$

Intervalli:

Def: Un intervallo è un insieme di uno dei seguenti tipi:

• $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ con $a \leq b$
 INTERVALLO CHIUSO DI ESTREMI a E b

• $]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ con $a < b$
 $\cup (a, b)$ INTERVALLO APERTO DI ESTREMI a E b

- $]a, b] := \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b \}$ con $a < b$.
INTERVALLO SEMICHIUSO A DESTRA DI ESTREMI a E b
(o SEMIAPERTO A SINISTRA)
- $[a, b[:= \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b \}$ con $a < b$.
INTERVALLO SEMIAPERTO A DESTRA DI ESTREMI a E b
(o SEMICHIUSO A SINISTRA)
- $[a, +\infty[:= \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq a \}$ 
SEMIRETTA DESTRA CHIUSA DI ESTREMO a .
- $]a, +\infty[= \{ x \in \mathbb{R} \mid x > a \}$
SEMIRETTA DESTRA APERTA DI ESTREMO a
- $] -\infty, b]$
SEMIRETTA SINISTRA CHIUSA DI ESTREMO b
- $] -\infty, b[$
SEMIRETTA SINISTRA APERTA DI ESTREMO b .
- $\mathbb{R} =] -\infty, +\infty[$ RETTA REALE
- $\emptyset$

oss Se $a = b \in \mathbb{R}$: $[a, a] = \{a\}$.

Def Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Chiamiamo CENTRO o PUNTO MEDIO

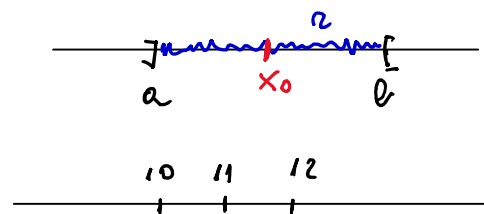
di $]a, b[$, il punto $x_0 = \frac{a+b}{2}$

Chiamiamo RAGGIO di $]a, b[$ il numero

$$r := \frac{b-a}{2}.$$

oss

$$\begin{aligned}]a, b[&=]x_0 - r, x_0 + r[\\ &= \{ x \in \mathbb{R} \mid x_0 - r < x < x_0 + r \} \end{aligned}$$



$$= \{ x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < r \}$$

$$\begin{aligned} [a, b] &= [x_0 - r, x_0 + r] \\ &= \{ x \in \mathbb{R} \mid x_0 - r \leq x \leq x_0 + r \} \\ &= \{ x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| \leq r \}. \end{aligned}$$

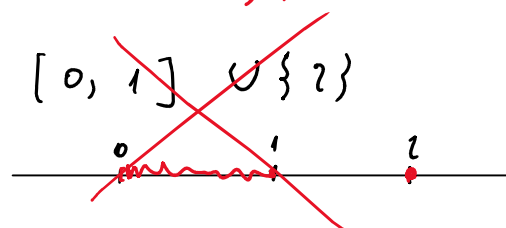
TEOREMA (CARATTERIZZAZIONE DEGLI INTERVALLI).

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Allora

A è un intervallo $\Leftrightarrow$

$\forall x, y \in A$ con $x < y$ e

$\forall z \in \mathbb{R}$ t.c. $x < z < y$ risulta $z \in A$.



Tutti gli intervalli non vuoti hanno un estremo destro e un estremo sinistro (eventualmente infiniti).

Verifichiamo che ogni insieme non vuoto ha un "estremo destro" e un "estremo sinistro".

$A = [1, 14]$ 14 è massimo di A .

$A = [1, 14[$ $\nexists \max A$

Def: Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Sia $M \in A$. Si dice che M è il **MASSIMO** di A se $\forall a \in A: a \leq M$.

Def Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme, $A \neq \emptyset$. Sia $m \in A$. Si dice che m è il **MINIMO** di A se $\forall a \in A: m \leq a$.

Il massimo e il minimo di A , se esistono, si indicano con $\max A$ e $\min A$.

$\max$ e $\min$ non sempre esistono:

$$A = [0, 1[\quad \nexists \max A, \text{ mentre } \min A = 0.$$

$$A =]1, 3[\quad \nexists \max A, \quad \nexists \min A.$$

$$A = [0, +\infty[\quad \nexists \max A, \quad \exists \min A = 0.$$

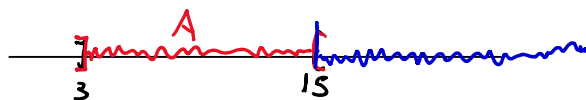
$$A = [1, 1] = \{1\} \quad \exists \max A = 1, \quad \exists \min A = 1.$$

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\} \quad \nexists \max \mathbb{N}, \quad \min \mathbb{N} = 0.$$

Def: Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Sia $M \in \mathbb{R}$. Si dice che M è un **MAGGIORANTE PER A** se $\forall a \in A: a \leq M$.

ESEMPIO

• $A =]3, 15[$.



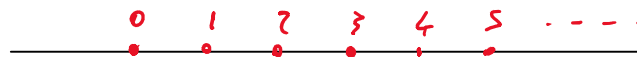
20 è un maggiorante.

16 è un maggiorante.

15 è un maggiorante.

14 non è un maggiorante.

• $A = \mathbb{N}$.



non ha maggioranti.

Def: Si dice che $A \subseteq \mathbb{R}$ è **LIMITATO SUPERIORMENTE** se esiste almeno un maggiorante. L'insieme dei maggioranti di A si indica con M_A .

$$M_A = \{ M \in \mathbb{R} \mid \forall a \in A : a \leq M \}$$

Se non esistono maggioranti per A ($M_A = \emptyset$) si dice che A non è superiormente limitato.

$$A =]1, 15[\quad \text{è} \quad \text{sup. lim.}$$

$$A = \mathbb{N} \quad \text{non è} \quad \text{sup. lim.}$$

Def: Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$.

- Se A è superiormente limitato, chiameremo ESTREMO SUPERIORE DI A ($\sup A$) il minimo di M_A .
- Se A non è superiormente limitato diremo che il suo estremo superiore è $+\infty$. ($\sup A = +\infty$)

TEOREMA (DI ESISTENZA DEL SUP).

Sia $A \neq \emptyset$, A superiormente limitato allora $\exists \sup A = \min M_A$.

DIM

Sia $B = M_A$. Siccome A è sup. lim. $B \neq \emptyset$.

Inoltre $\forall b \in B$ e $\forall a \in A : a \leq b$.

Per la proprietà di Dedekind $\exists c \in \mathbb{R}$. t.c.

$$\forall a \in A, b \in B : a \leq c \quad \text{e} \quad c \leq b$$

$$\text{Allora } \forall a \in A : a \leq c \Rightarrow c \in M_A.$$

$$\text{e } \forall b \in B = M_A : c \leq b \Rightarrow c = \min M_A \quad \blacksquare$$

ESEMPI

$$A =]-4, 7[\quad \sup A = 7$$

$$A =]0, 1[\cup]4, 18[\quad \sup A = 18.$$

$$A = \mathbb{N} : \quad \sup A = +\infty.$$

Def: Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Sia $m \in \mathbb{R}$. Si dice che m è un **MINORANTE** per A se $\forall a \in A$; $m \leq a$.
L'insieme dei minoranti si indica con m_A .

Def: Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Si dice che A è **INFERIORMENTE** limitato se $\exists$ un minorante ($m_A \neq \emptyset$). Altrimenti ($m_A = \emptyset$) si dice che A non è inf. lim.

Def Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Si definisce **ESTREMO INFERIORE** di A la quantità

$$\inf A := \begin{cases} \max m_A & \text{se } m_A \neq \emptyset \\ -\infty & \text{se } m_A = \emptyset. \end{cases}$$

• $A = [4, 10[$



$$\sup A = 10, \quad \inf A = 4$$

$$\nexists \max A, \quad \min A = 4.$$

$$m_A = [10, +\infty[, \quad m_A =]-\infty, 4]$$

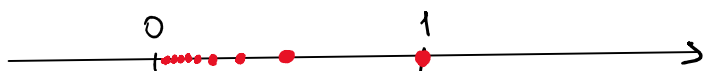
• $A = \mathbb{Z}$

$$\sup A = +\infty, \quad \inf A = -\infty$$

$$\nexists \max A \quad \text{e} \quad \nexists \min A.$$

• $A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$

$$= \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots \right\}$$



$$\sup A = 1 = \max A$$

$$\inf A = 0 \quad \text{e} \quad \nexists \min A$$

oss

- 1) Se $\exists \max A$ allora $\sup A = \max A$.
Se $\exists \min A$ allora $\inf A = \min A$.
 - 2) Se $\sup A \in A$ allora $\exists \max A = \sup A$.
Se $\inf A \in A$ allora $\min A = \inf A$.
 - 3) Se $\sup A \notin A$, allora $\nexists \max A$.
Se $\inf A \notin A$, allora $\nexists \min A$.
-

$\sup$ ci permette di dare con precisione le definizioni di alcuni numeri irrazionali.

$\sqrt{2}$ cosa significa?

è l'unico numero positivo il cui quadrato è 2.

Tale numero esiste, infatti si può dimostrare che
 $\sqrt{2} := \sup \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \text{ e } x^2 < 2 \}$.

Si dimostra che con questa definizione $(\sqrt{2})^2 = 2$.

TEOREMA: Sia $y \in \mathbb{R}$, $y \geq 0$. Allora $\exists!$ $x \in \mathbb{R}$
t.c. $x \geq 0$ e $x^2 = y$. Tale numero è detto
RADICE QUADRATA di y e si indica con $\sqrt{y}$.

(Idea: $\sqrt{y} = \sup \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \text{ e } x^2 \leq y \}$)

Ricordare:

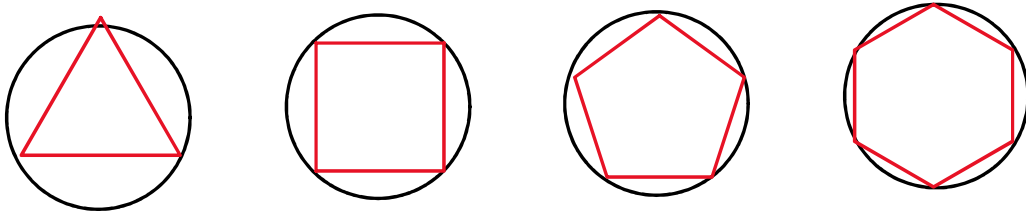
- $\sqrt{y}$ è definito solo se $y \geq 0$.

- $\sqrt{y} \geq 0 \quad \forall y \geq 0.$
- Se $y \in \mathbb{R}$ e consideriamo l'equazione $x^2 = y$
 - 1) Se $y < 0$, non esistono soluzioni.
 - 2) Se $y = 0$, $x = 0$ è l'unica sol. ($\sqrt{0} = 0$)
 - 3) Se $y > 0$, le soluzioni sono $x = \pm \sqrt{y}.$

Altri numeri che possiamo definire come sup.

π è il rapporto tra la lunghezza di una circonferenza e il suo diametro.

Cosa si intende per lunghezza di una circonferenza?
Circonferenza di raggio 1:



Sia P_m il perimetro del poligono regolare inscritto nella circonferenza di raggio 1 con m lati.

Possiamo definire LUNGHEZZA della circonferenza
 $L := \sup \{ P_m \mid m \in \mathbb{N}, m \geq 3 \}.$

Possiamo poi definire $\pi := \frac{L}{2}$ (cioè $L = 2\pi$)

e NUMERO DI NEPERO.

$$e := \sup \left\{ \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \mid m \in \mathbb{N}, m \geq 1 \right\}.$$

Sia C un capitale da investire nell'oro di un anno.

Se dopo un anno il capitale raddoppia, alla fine dell'anno avremo

$$C_{FIN} = 2C = C \cdot 2 = C \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1.$$

Raddoppiare il capitale significa aumentarlo del 100%

Domanda è meglio aumentare C del 100% in un anno o aumentarlo del 50% ogni 6 mesi?

Dopo 6 mesi ci troviamo un capitale:

$$C_1 = C + \frac{1}{2}C = C \left(1 + \frac{1}{2}\right)$$

Dopo un anno:

$$C_{FIN} = C_1 + \frac{1}{2}C_1 = C_1 \left(1 + \frac{1}{2}\right) = C \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2.$$

Se dividiamo un anno in tre periodi uguali:

$$C_{FIN} = C \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3$$

Studiando i numeri del tipo $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ si è scoperto che crescono e si avvicinano ad un numero specifico indicato con

$$e = \sup \left\{ \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \mid m \in \mathbb{N}, m \geq 1 \right\}.$$