

MATEMATICA LEZIONE 4

lunedì 5 ottobre 2026 09:09

ESERCIZIO

Risolvi la disequazione:

$$4x^3 + 12x^2 + 9x + 2 > 0.$$

$$p(x) = 4x^3 + 12x^2 + 9x + 2$$

Cerchiamo delle radici razionali.

Num: $\pm 1, \pm 2$

Den: $\pm 1, \pm 2, \pm 4$

Possibili radici razionali: $\pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}$

$$p(-1) = -4 + 12 - 9 + 2 = 1 \neq 0$$

$$p(-2) = -32 + 48 - 18 + 2 = 0 \quad (-2 \text{ è una radice})$$

Dividiamo per $x + 2$:

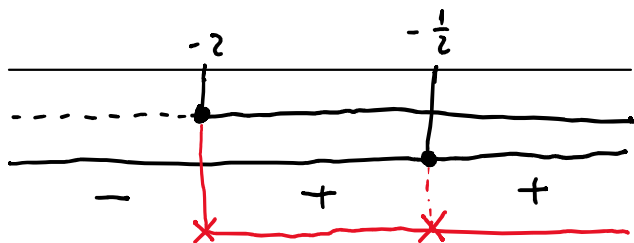
	4	12	9	2
-2		-8	-8	-2
	4	4	1	0

$$p(x) = (x + 2)(4x^2 + 4x + 1)$$

$$\Delta = 16 - 16 = 0, \quad x = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} p(x) &= (x + 2) 4 \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \\ &= 4(x + 2) \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Segno di $p(x)$



> 0

Soluzioni: $x > -2 \wedge x \neq -\frac{1}{2}$
 $(-2 < x < -\frac{1}{2} \vee x > -\frac{1}{2})$

Non sempre Ruffini e il metodo più rapido per fattorizzare un polinomio

$$\begin{aligned} \bullet X^6 - 4X^2 &= X^2(X^4 - 4) \\ &= X^2(X^2 + 2)(X^2 - 2) \end{aligned}$$

Radici: $0, \pm\sqrt{2}$.

$$\bullet 2X^4 - X^2 - 3 = 0$$

Possibili radici razionali:

$$\pm 1, \pm 3, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}$$

Cerchiamo un metodo diverso.

Sostituzione: $t = x^2$

$$2x^4 - x^2 - 3 = 0$$

$$2t^2 - t - 3 = 0$$

$$\Delta = 1 + 24 = 25$$

$$t_{1,2} = \frac{1 \pm 5}{4} = \begin{cases} \frac{3}{2} \\ -1 \end{cases}$$

nessuno di questi numeri però risulta essere radice di p .
 Se ci sono radici, devono essere irrazionali.

$$\begin{array}{lll}
 t = -1 & \vee & t = \frac{3}{2} \\
 x^2 = -1 & \vee & x^2 = \frac{3}{2} \\
 (\text{impossibile}) & & x = \pm \sqrt{\frac{3}{2}}
 \end{array}$$

Soluzioni: $\pm \sqrt{\frac{3}{2}}$

Equazioni e disequazioni razionali (fratte).

Sono equazioni e disequazioni che si riconducono alla forma:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = 0 \quad / \quad \frac{p(x)}{q(x)} \geq 0 \quad / \quad \frac{p(x)}{q(x)} \leq 0 \quad / \quad \frac{p(x)}{q(x)} > 0 \quad / \quad \frac{p(x)}{q(x)} < 0$$

con p e q polinomi. L'incognita x compare in un rapporto tra polinomi.

Si usano con gli stessi metodi che abbiamo visto per i polinomi, ricordando che i denominatori non possono annullarsi.
(CONDIZIONI DI ESISTENZA).

ESEMPLI

$$1) \quad \frac{x+1}{x^2-x} = \frac{2x}{x-1}$$

$$\begin{array}{ll}
 \text{c.e.:} & x^2 - x \neq 0 \rightarrow x(x-1) \neq 0 \rightarrow x \neq 0 \wedge x \neq 1 \\
 & x-1 \neq 0 \rightarrow x \neq 1
 \end{array}$$

Quindi: $x \neq 0$ $\wedge$ $x \neq 1$.

$$\frac{x+1}{x^2-x} = \frac{2x}{x-1}$$

$$\frac{x+1}{x(x-1)} = \frac{2x}{x-1}$$

Moltiplichiamo per $x(x-1)$

$$x+1 = \frac{2x}{\cancel{x-1}} \cdot x \cdot \cancel{(x-1)}$$

$$x+1 = 2x^2$$

$$2x^2 - x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \begin{cases} 1 & \times \text{ va escluso perché non soddisfa la c.e.} \\ -\frac{1}{2} & \checkmark \end{cases}$$

$x = -\frac{1}{2}$ è l'unica soluzione dell'equazione.

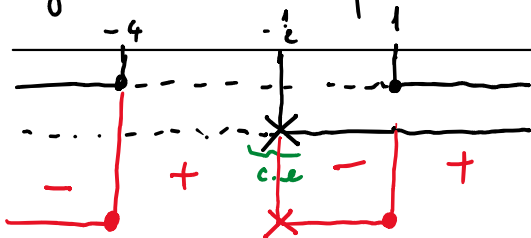
$$2) \quad \frac{x^2 + 3x - 4}{2x + 1} \leq 0$$

In questo caso le c.e. si possono imporre direttamente durante lo studio del segno.

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \begin{cases} 1 \\ -4 \end{cases}$$



Segno della frazione:



Soluzioni: $x \leq -4$ $\vee$ $-\frac{1}{2} < x \leq 1$.

Attenzione: Nelle equazioni si può moltiplicare per i denominatori dopo aver imposto le c.e.
 Nelle disequazioni **NO**
 (a meno che non conosciamo il segno del denominatore)

ESEMPL

$$\begin{aligned} \cdot \frac{1}{x-1} &= 1 \\ 1 &= x-1 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

$$c.e. \quad x \neq 1$$

$$\cdot \frac{1}{x-1} > 1$$

(non si può moltiplicare per $x-1$)

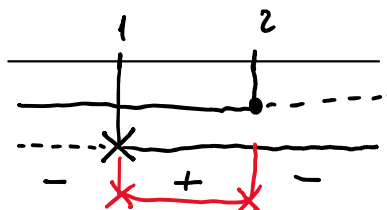
$$\frac{1}{x-1} - 1 > 0$$

$$\frac{1 - (x-1)}{x-1} > 0$$

$$\frac{1 - x + 1}{x-1} > 0$$

$$\frac{2-x}{x-1} > 0$$

$$1 < x < 2$$



$$\cdot \frac{2x}{x^2+1} \leq 0$$

$$2x \leq 0$$

$$x \leq 0.$$

qui si può moltiplicare per x^2+1 . Perché $x^2+1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

OSS

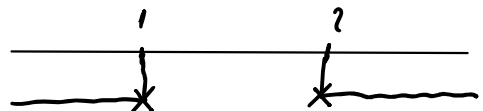
$$\bullet \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p_1(x)}{q_1(x)} \Leftrightarrow q_1(x) p(x) = q(x) p_1(x)$$

con c.e: $q(x) \neq 0, q_1(x) \neq 0$.

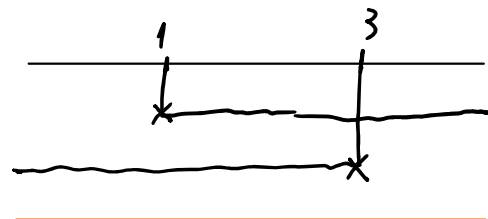
$$\bullet \frac{p(x)}{q(x)} \geq \frac{p_1(x)}{q_1(x)} \Leftrightarrow \frac{p(x)}{q(x)} - \frac{p_1(x)}{q_1(x)} \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{q_1(x)p(x) - q(x)p_1(x)}{q(x)q_1(x)} \geq 0.$$

Unione di soluzioni di più disequazioni

$$\bullet x < 1 \quad \vee \quad x > 2$$



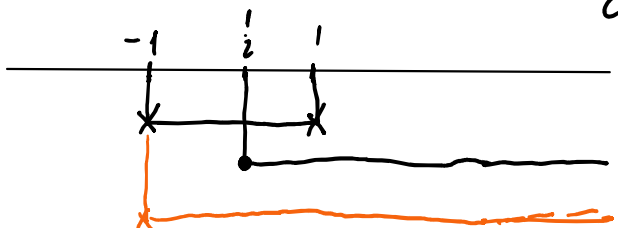
$$\bullet x > 1 \quad \vee \quad x < 3$$



Graficamente,
fare l'unione degli
insiemi delle soluzioni
significa considerare tutti
gli x per cui abbiamo
almeno uno zero del
grafico

Le condizioni
sono soddisfatte
da ogni $x \in \mathbb{R}$.

$$\bullet x^2 - 1 < 0 \quad \vee \quad x \geq \frac{1}{2}$$
$$-1 < x < 1 \quad \vee \quad x \geq \frac{1}{2}$$



$$x > -1.$$

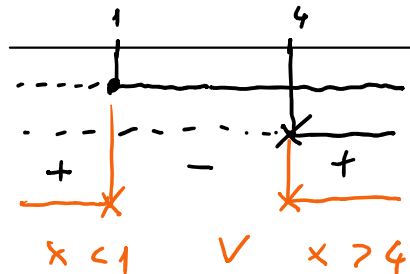
Intersezione / sistemi di disequazioni

$$\begin{cases} \text{disequazione 1} \\ \text{disequazione 2} \\ \vdots \end{cases}$$

Per rappresentare graficamente le soluzioni del sistema, si rappresentano le soluzioni delle singole disequazioni e si prendono le regioni comuni a tutte le soluzioni.

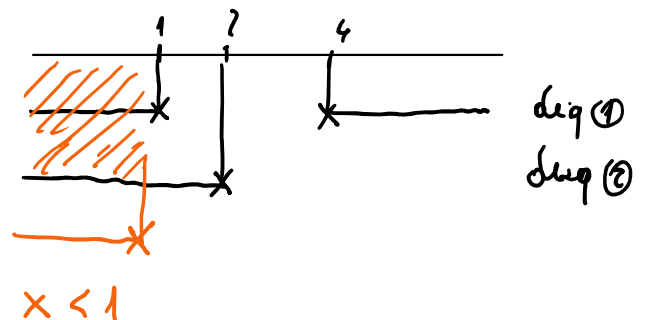
$$\begin{cases} \frac{x-1}{x-4} > 0 & \textcircled{1} \\ 2-x > 0 & \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \quad \frac{x-1}{x-4} > 0$$



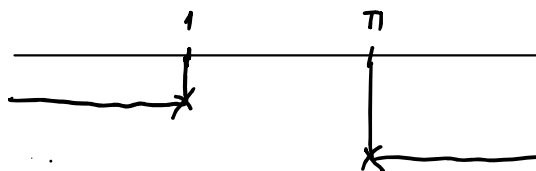
$$\textcircled{2} \quad 2-x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -x > -2 \quad \Leftrightarrow \quad x < 2$$

$$\begin{cases} x < 1 \quad \vee \quad x > 4 \\ x < 2 \end{cases}$$



Soluzioni del sistema: $x < 1$.

$$\begin{cases} x < 1 \\ x > \pi \end{cases}$$



Il sistema non ha soluzioni.

Sistemi multi:

$$\begin{cases} \text{equazione} \\ \text{disuguaglianza 1} \\ \text{disuguaglianza 2} \\ \vdots \end{cases}$$

Basta risolvere l'equazione e verificare se le soluzioni che troviamo soddisfanno anche tutte le disuguaglianze.

ESEMPIO:

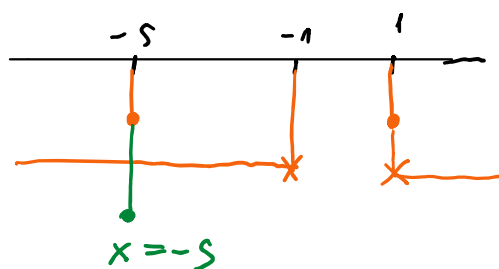
$$\begin{cases} x^2 + 4x - 5 = 0 \\ x^2 - 1 > 0 \end{cases}$$

$$x^2 + 4x - 5 = 0$$

$$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4+5} = \begin{cases} 1 \\ -5 \end{cases}$$

$$x^2 - 1 > 0 \Rightarrow x > 1 \vee x < -1$$

$$\begin{cases} \cancel{x = 1} \vee x = -5 \\ x > 1 \vee x < -1 \end{cases}$$



Unica soluzione del sistema:
 $x = -5$

Valore assoluto

Def: Sia $a \in \mathbb{R}$. Definiamo **VALORE ASSOLUTO** di a la quantità: $|a| := \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0 \\ -a & \text{se } a < 0. \end{cases}$

$$|-5| = 5$$

$$|\sqrt{3}| = \sqrt{3}$$

$$|-111| = 111$$

$$|0| = 0$$

PROPRIETÀ

$$1) \forall a \in \mathbb{R} : |a| \geq 0.$$

$$2) \forall a \in \mathbb{R} : |a| = 0 \Leftrightarrow a = 0.$$

$$3) \forall a, b \in \mathbb{R} : |a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

$$\text{e, se } b \neq 0 : \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$$

$$4) \forall a, b \in \mathbb{R} : \begin{aligned} |a + b| &\leq |a| + |b| \\ |a - b| &\leq |a| + |b| \end{aligned}$$

$$5) \forall a, b \in \mathbb{R} : ||a| - |b|| \leq |a - b|$$

$$6) \forall a \in \mathbb{R} : |-a| = |a| \text{ e } |a|^2 = |a^2| = a^2.$$

$$7) \forall a, b \in \mathbb{R} : |a| = |b| \Leftrightarrow a = b \vee a = -b.$$

$$8) \forall a, b \in \mathbb{R} : |a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -b \leq a \\ a \leq b \end{cases}$$

$$9) \forall a, b \in \mathbb{R} : |a| \geq b \iff a \geq b \vee a \leq -b.$$

10) $\forall a, b \in \mathbb{R} : |a - b|$ rappresenta la distanza tra a e b sulla retta reale.



Vogliamo risolvere equazioni e disequazioni con un valore assoluto. Tipo più semplice:

$$|a(x)| = b(x)$$

Metodo: $|a(x)| = \begin{cases} a(x) & \text{se } a(x) \geq 0 \\ -a(x) & \text{se } a(x) < 0. \end{cases}$

Quindi:

$$|a(x)| = b(x) \iff \begin{cases} a(x) \geq 0 \\ a(x) = b(x) \end{cases} \vee \begin{cases} a(x) < 0 \\ -a(x) = b(x) \end{cases}$$

In modo simile, per le disequazioni avremo:

$$|a(x)| \geq b(x) \iff \begin{cases} a(x) \geq 0 \\ a(x) \geq b(x) \end{cases} \vee \begin{cases} a(x) < 0 \\ -a(x) \geq b(x) \end{cases}$$

$$|a(x)| \leq b(x) \iff \begin{cases} a(x) \geq 0 \\ a(x) \leq b(x) \end{cases} \vee \begin{cases} a(x) < 0 \\ -a(x) \leq b(x) \end{cases}$$

$$|a(x)| > b(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a(x) \geq 0 \\ a(x) > b(x) \end{cases} \vee \begin{cases} a(x) < 0 \\ -a(x) > b(x) \end{cases}$$

$$|a(x)| < b(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a(x) \geq 0 \\ a(x) < b(x) \end{cases} \vee \begin{cases} a(x) < 0 \\ -a(x) < b(x) \end{cases}$$

ESEMPIO 1

$$|6x - 1| = 10 - 9x$$

Equivalente a:

$$\begin{cases} 6x - 1 \geq 0 \\ 6x - 1 = 10 - 9x \end{cases} \vee \begin{cases} 6x - 1 < 0 \\ -6x + 1 = 10 - 9x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq \frac{1}{6} \\ 15x = 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq \frac{1}{6} \\ x = \frac{11}{15} \end{cases}$$

$$\left(\frac{11}{15} \geq \frac{1}{6} ? \quad \frac{11}{5} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 22 \geq 5 \text{ VERO!} \right)$$

$$x = \frac{11}{15} \text{ è una soluzione}$$

$x = \frac{11}{15}$ è l'unica soluzione dell'equazione di partenza.

$$\begin{cases} x < \frac{1}{6} \\ 3x = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < \frac{1}{6} \\ x = 3 \end{cases}$$

$$3 < \frac{1}{6} ? \text{ NO}$$

Il secondo sistema non ha soluzione.

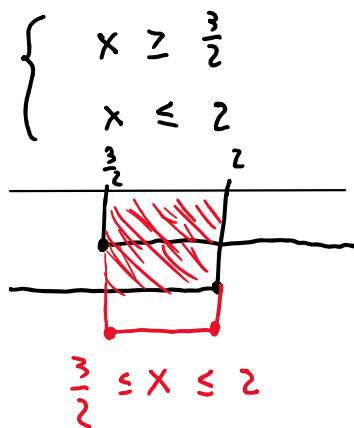
ESEMPIO 2

$$x - |2x - 3| \geq 1$$

$$\begin{cases} 2x - 3 \geq 0 \\ x - (2x - 3) \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ x - 2x + 3 \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -x &\geq -2 \\ x &\leq 2 \end{aligned}$$

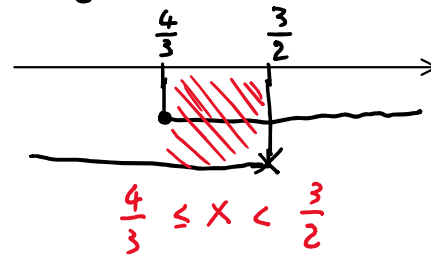


$$\vee \begin{cases} 2x - 3 < 0 \\ x + 2x - 3 \geq 1 \end{cases}$$

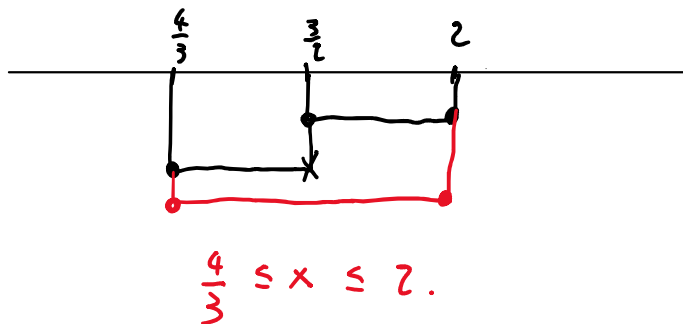
$$\begin{cases} x < \frac{3}{2} \\ x + 2x - 3 \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 3x &\geq 4 \\ x &\geq \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x < \frac{3}{2} \\ x \geq \frac{4}{3} \end{cases}$$



Soluzioni: $\frac{3}{2} \leq x \leq 2 \quad \vee \quad \frac{4}{3} \leq x < \frac{3}{2}$



Metodo alternativo (per le disuguaglianze)

$$\bullet \quad |a(x)| \leq b(x) \Leftrightarrow -b(x) \leq a(x) \leq b(x)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -b(x) \leq a(x) \\ a(x) \leq b(x) \end{cases}$$

$$\bullet \quad |a(x)| \geq b(x) \Leftrightarrow a(x) \geq b(x) \vee a(x) \leq -b(x)$$

Analogamente, per le disuguaglianze strette:

$$\bullet \quad |a(x)| < b(x) \Leftrightarrow -b(x) < a(x) < b(x)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -b(x) < a(x) \\ a(x) < b(x) \end{cases}$$

$$\bullet \quad |a(x)| > b(x) \Leftrightarrow a(x) > b(x) \vee a(x) < -b(x)$$

ESEMPIO

Risolviamo la disequas. dell'esempio precedente con il secondo metodo:

$$x - |2x - 3| \geq 1$$

$$x - 1 \geq |2x - 3|$$

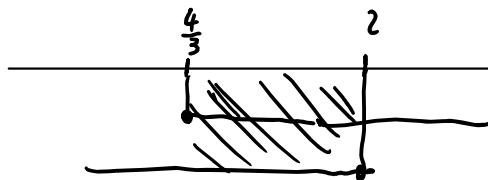
$$|2x - 3| \leq x - 1$$

$$-x + 1 \leq 2x - 3 \leq x - 1$$

$$\begin{cases} -x + 1 \leq 2x - 3 \\ 2x - 3 \leq x - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x \leq -4 \\ x \leq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq \frac{4}{3} \\ x \leq 2 \end{cases}$$



$$\text{Soluzione: } \frac{4}{3} \leq x \leq 2.$$

Vantaggi del metodo 2: • più rapido

- le soluzioni vengono date in maniera più chiara

Svantaggi: • Differenze di metodi tra $\geq, >$ e $\leq, <$.

- Si applica solo a diseq. del tipo
 $|a(x)| \leq b(x) / |a(x)| \geq b(x) / |a(x)| > b(x) / |a(x)| < b(x)$
- Non si applica alle eq. del tipo $|a(x)| = b(x)$

$$|a(x)| = b(x) \quad \not\Rightarrow \quad \begin{array}{l} a(x) = b(x) \\ \vee a(x) = -b(x) \end{array}$$

Invece:

$$|a(x)| = |b(x)| \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} a(x) = b(x) \\ \vee a(x) = -b(x), \end{array}$$

ESERCIZIO DI ESAME

Risolvere:

$$\frac{|3x - 2| - 1}{x^2 - 3} \leq 0.$$

Svilgimento nella prossima lezione: