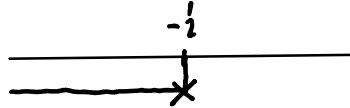


# MATEMATICA LEZIONE 3

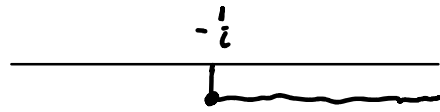
venerdì 2 ottobre 2026 11:00

Nella scorsa lezione abbiamo visto equazioni e disequazioni di I grado.

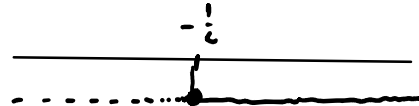
- $2x + 1 < 0$   
 $2x < -1$   
 $x < -\frac{1}{2}$



- $2x + 1 \geq 0$   
 $x \geq -\frac{1}{2}$



- Segno di  $2x + 1$



Polinomi di II grado:

$$p(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{con } a, b, c \in \mathbb{R} \\ a \neq 0.$$

Equazioni polinomiali di II grado:

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

L'esistenza di soluzioni dipende dal **DISCRIMINANTE**:  $\Delta := b^2 - 4ac$ .

## TEOREMA

Siano  $a, b, c \in \mathbb{R}$  con  $a \neq 0$ .

1) Se  $\Delta > 0$ , allora l'eq.  $ax^2 + bx + c = 0$  ha due soluzioni  $x_1, x_2$  determinate da:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

2)  $\Delta = 0$ , l'eq. ha un'unica soluzione

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

3) Se  $\Delta < 0$ , l'eq. non ha soluzioni (reali).

DIM

$$ax^2 + bx + c = \underbrace{a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a}}_*$$

$$* a \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} \right) - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$= ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$= ax^2 + bx + \frac{\cancel{b^2} - \cancel{b^2} + 4ac}{4a}$$

$$= ax^2 + bx + c.$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = 0 \quad \text{divido per } a$$

$$* \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0 \quad \text{Se } \Delta > 0:$$

$$\left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left( \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right)^2 = 0$$

$$\left( x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left( x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) = 0$$

$$x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 0 \quad \vee \quad x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 0$$

$$x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \vee \quad x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \vee \quad x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Se  $\Delta = 0$

$$* \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}$$

(unica soluzione)

• Se  $\Delta < 0$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$$

$$\underbrace{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}_{\geq 0 \text{ perché } x \text{ un quadrato}} = \underbrace{\frac{\Delta}{4a^2}}_{< 0} \quad \text{impossibile.}$$

ESEMP1

$$• \quad x^2 + x - 2 = 0$$

$$a=1, \quad b=1, \quad c=-2$$

$$\Delta = 1 + 8 = 9 > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

$$\text{Soluzioni: } x_1 = -2, \quad x_2 = 1.$$

$$• \quad 3x^2 + 4x = -1$$

$$3x^2 + 4x + 1 = 0$$

$$\Delta = 16 - 12 = 4$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm 2}{6} = \begin{cases} -\frac{1}{3} \\ -1 \end{cases}$$

$$x = -1 \quad \vee \quad x = -\frac{1}{3}.$$

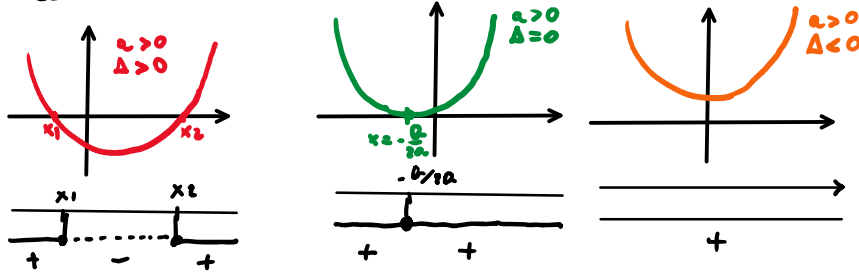
Disuguaglianze:

Rappresentazione grafica:

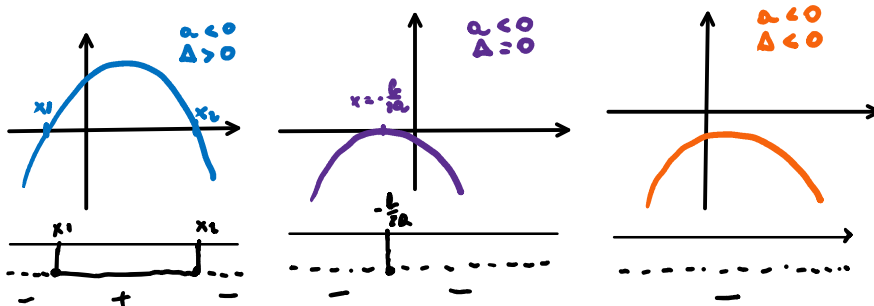
$y = ax^2 + bx + c$  rappresenta una

parabola la cui concavità dipende da  $a$ :

Se  $a > 0$ :



$a < 0$ :



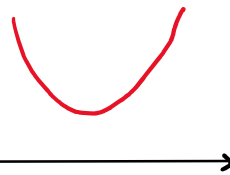
Questi grafici permettono di risolvere disequazioni.

•  $x^2 - 5x + 4 < 0$



Soluzione:  $1 < x < 4$

$a = 1 > 0$   
 $\Delta = 25 - 16 = 9$   
 $x_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{matrix} 4 \\ 1 \end{matrix}$



•  $x^2 + x + 5 > 0$

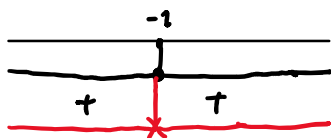
$\Delta = 1 - 20 = -19 < 0$

La disequazione è sempre vera  
 Soluzioni:  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

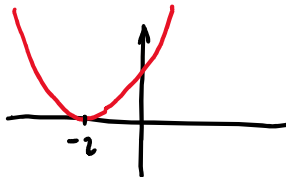
•  $x^2 + 4x + 4 = 0$

$\Delta = 16 - 16 = 0$ ,  $x = -\frac{4}{2} = -2$

$$x^2 + 4x + 4 \geq 0$$



$$x < -2 \vee x > -2$$

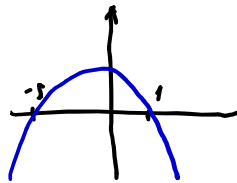


(oppure  $\forall x \in \mathbb{R}$   
k.e.  $x \neq -2$ )

$$5 - 4x - x^2 \geq 0$$

$$\Delta = 16 + 20 = 36$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm 6}{-2} = \begin{cases} -5 \\ 1 \end{cases}$$



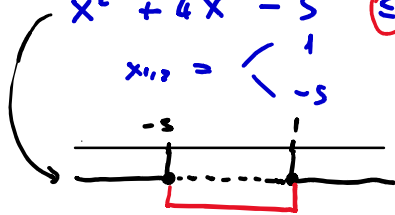
$$-5 \leq x \leq 1.$$

Alternative

$$5 - 4x - x^2 \geq 0$$

$$x^2 + 4x - 5 \leq 0$$

$$x_{1,2} = \begin{cases} 1 \\ -5 \end{cases}$$



$$-5 \leq x \leq 1.$$

Casi particolari (eq. / diseq non complete)

$$ax^2 + bx = 0 \quad \text{con } a \neq 0.$$

$$x(ax + b) = 0$$

$$\Delta = b^2$$

$$x = 0 \vee x = -\frac{b}{a}$$

$$ax^2 + c = 0$$

$$x^2 = -\frac{c}{a}$$

Bisogna controllare il  
segno di questo numero:

Se  $-\frac{c}{a} < 0$  : non ci sono soluzioni.

Se  $-\frac{c}{a} = 0$  ( $c = 0$ ) :  $x = 0$  unica  
sol.

Se  $-\frac{c}{a} > 0$  :  $x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$

$$x^2 + 3 = 0$$

$$x^2 = -3 \quad \text{impossibile}$$

$$x^2 - 3 = 0$$

$$x^2 = 3 \quad x = \pm\sqrt{3}$$

Segno di  $x^2 - 4$  ?

$$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow x = \pm 2$$



oss

$$1) \quad ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

Vertice della parabola:

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right).$$

2) Se  $\Delta > 0$ , e  $x_1, x_2$  sono le due radici

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

3) Se  $\Delta = 0$ :

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$$

$$\text{dove } x_0 = -\frac{b}{2a}.$$

4) Formula ridotta:

Se  $\Delta > 0$ :

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2}}{a} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{a}$$

$$= \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}$$

FORMULA RIDOTTA  
PER LE RADICI

$$x^2 + 14x - 15$$

$$x_{1,2} = \frac{-14 \pm \sqrt{49 + 15}}{1}$$

$$= -14 \pm 8 = \begin{cases} -6 \\ -22 \end{cases}$$

5) Se  $\Delta < 0$ :

$ax^2 + bx + c$  ha sempre lo stesso segno di  $a$ .

## Equazioni e disequazioni con prodotti di polinomi:

$$x^3 - 3x^2 + 2x = 0$$

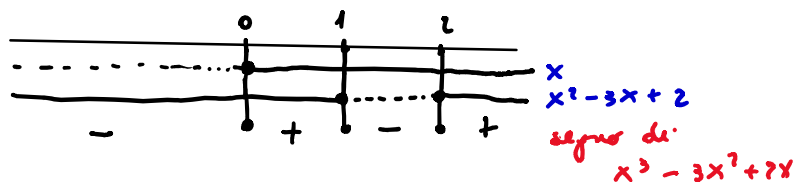
$$x(x^2 - 3x + 2) = 0$$

$$x = 0 \quad \vee \quad x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2} \quad \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}$$

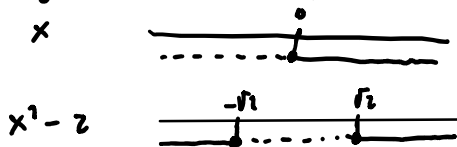
$$\text{Soluzioni: } x = 0 \quad \vee \quad x = 1 \quad \vee \quad x = 2.$$

Segno di  $x^3 - 3x^2 + 2x$  ?  
 $x(x^2 - 3x + 2)$



$$x(x^2 - 2)(2x^2 - 5x - 3) \leq 0.$$

Segni dei tre fattori:



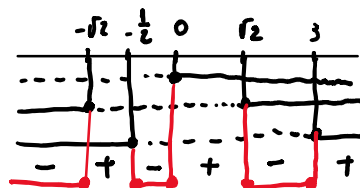
$$2x^2 - 5x - 3$$

$$\Delta = 25 + 24 = 49$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm 7}{4} = \begin{matrix} 3 \\ -\frac{1}{2} \end{matrix}$$



Segno del prodotto:

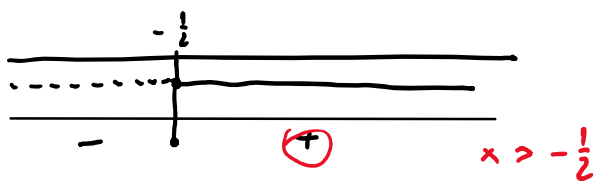


$$x \leq -\sqrt{2} \quad \vee \quad -\frac{1}{2} \leq x \leq 0 \quad \vee \quad \sqrt{2} \leq x \leq 3.$$

$$(2x + 1)(x^2 + 4x + 10) > 0$$

$$\Delta = 16 - 40 < 0$$

$$x^2 + 4x + 10 > 0 \quad \forall x$$



Oppure:

$$(2x+1) \underbrace{(x^2 + 4x + 10)}_{>0} > 0$$

$$2x+1 > 0$$

$$2x > -1$$

$$x > -\frac{1}{2}$$

Equazioni e disequazioni polinomiali di grado  $\geq 3$ .

Vogliamo risolvere  $p(x) = 0$

(o  $p(x) \geq 0$  /  $p(x) \leq 0$  ...)

#### TEOREMA

Ogni polinomio di grado  $\geq 3$  si può scrivere come prodotto di polinomi di grado 1 o 2 (inoltre i fattori di grado 2 si possono prendere con  $\Delta < 0$ ).

Per capire come si fa a fattorizzare un polinomio ci servono alcuni risultati:

Divisione con resto tra polinomi:

#### TEOREMA DI DIVISIONE TRA POLINOMI

Siano  $a(x)$ ,  $b(x)$  due polinomi con  $b(x) \neq 0$ . Allora  $\exists!$   $q(x)$ ,  $r(x)$  polinomi tali che:

$$a(x) = b(x) q(x) + r(x)$$

$$r(x) = 0 \text{ o } \deg r(x) < \deg b(x).$$

ESEMPIO

$$a(x) = x^5 + x^3 + x + 1$$

$$b(x) = x^3 + 2$$

Divisione con resto:

$$\begin{array}{r|l} \textcircled{x^5} + 0 \cdot x^4 + x^3 + 0 \cdot x^2 + x + 1 & \textcircled{x^3 + 2} \\ x^5 & x^2 + 1 \\ \hline & \textcircled{x^3} - 2x^2 + x + 1 \\ & x^3 & + 2 \\ \hline & -2x^2 + x - 1 \end{array}$$

$$q(x) = x^2 + 1$$

$$r(x) = -2x^2 + x - 1$$

oss Il procedimento descritto funziona se  $\deg a(x) \geq \deg b(x)$ . Se invece  $\deg a(x) < \deg b(x)$  allora:

$$q(x) = 0 \quad e \quad r(x) = a(x) \quad (a(x) = b(x) \cdot 0 + a(x))$$

oss Se  $b(x)$  è un polinomio di grado 1 allora il resto  $r(x)$  è un numero.

Caso speciale:  $b(x) = x - \alpha$  con  $\alpha \in \mathbb{R}$ . In questo caso quoziente e resto si possono determinare con la **REGOLA DI RUFFINI**:

$$a(x) = x^3 + x + 1$$

$$b(x) = x - \textcircled{2}$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 0 & 1 & 1 \\ & & +2 & & \\ \hline 2 & & 2 & 4 & 10 \\ \hline & 1 & 2 & 5 & \textcircled{11} \quad r(x) \end{array}$$

coefficienti di  $q(x)$

$$q(x) = x^2 + 2x + 5 \quad r(x) = 11.$$

oss Se  $r(x) = 0$  allora  
 $a(x) = b(x) \cdot q(x)$  e' un prodotto.

#### TEOREMA DEL RESTO

Sia  $a(x)$  un polinomio e  $\alpha \in \mathbb{R}$ .  
 Il resto della divisione di  $a(x)$  per  $x - \alpha$  e' uguale a  $a(\alpha)$ .

Questi risultati si usano per risolr.  
 eq. e disequazioni:

#### ESEMPIO

$$x^3 + x - 2 = 0.$$

Osserviamo che  $x=1$  e' una soluzione.

Dividiamo il pol. per  $x - 1$ .

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

$$q(x) = x^2 + x + 2$$

$$x^3 + x - 2 = (x-1)(x^2 + x + 2)$$

$$(x-1)(x^2 + x + 2) = 0$$

$$x = 1 \quad \vee \quad x^2 + x + 2 = 0$$

$$\Delta = 1 - 8 < 0.$$

$x=1$  e' l'unica soluzione.

#### ESEMPIO

$$\underbrace{3x^3 - 13x^2 - 8x + 4}_{p(x)} = 0$$

$$\begin{aligned}
 P\left(\frac{1}{3}\right) &= 3 \cdot \frac{1}{27} - \frac{13}{9} - \frac{8}{3} + 4 \\
 &= -\frac{12^4}{9^3} - \frac{8}{3} + 4 \\
 &= -4 + 4 = 0
 \end{aligned}$$

$\frac{1}{3}$  è una sol. e posso dir. per  
 $x - \frac{1}{3}$

$$\begin{array}{c|ccc|c}
 & 3 & -13 & -8 & 4 \\
 \frac{1}{3} & & 1 & -4 & -4 \\
 \hline
 & 3 & -12 & -12 & 0
 \end{array}$$

$$q(x) = 3x^2 - 12x - 12$$

$$(x - \frac{1}{3})(3x^2 - 12x - 12) = 0$$

$$\cancel{x - \frac{1}{3}}(x^2 - 4x - 4) = 0$$

$$x - \frac{1}{3} = 0 \quad \vee \quad x^2 - 4x - 4 = 0$$

$$\begin{aligned}
 x = \frac{1}{3} \quad \vee \quad x &= 2 \pm \sqrt{4+4} \\
 &= 2 \pm \sqrt{8}
 \end{aligned}$$

Le soluzioni:

$$x = \frac{1}{3} \quad \vee \quad x = 2 \pm \sqrt{8}$$

Perché abbiamo scelto  $\frac{1}{3}$ ?

#### TEOREMA

Sia  $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$

con  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{N}$

$n \geq 1$ . Se  $q \in \mathbb{Q}$  è una radice di  $p(x)$

allora  $q$  si può scrivere come  $\frac{a}{b}$

dove  $a$  è un divisore di  $a_0$

$b$  è un divisore di  $a_n$

$$\textcircled{3} x^3 - 13x^2 - 8x + \textcircled{4}$$

$a_3$   $a_0$

possibili numeratori: divisori di 4:  
 $\pm 1, \pm 2, \pm 4$

possibili denominatori: divisori di 3  
 cioè  $\pm 1, \pm 3$

Possibili radici di  $p(x)$  sono

$$\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm \textcircled{\frac{1}{3}}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{4}{3}.$$